



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA PLENA

ALEXANDRE PEREIRA SOUSA

**O QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA EUDLICIANA COMO
FUNDAMENTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA UMA
INTRODUÇÃO NO ÂMBITO EDUCACIONAL**

SÃO LUÍS

2025

ALEXANDRE PEREIRA SOUSA

**O QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA EUDLICIANA COMO
FUNDAMENTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA UMA
INTRODUÇÃO NO ÂMBITO EDUCACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à
Coordenadoria dos Cursos de Matemática da
Universidade Federal do Maranhão como
requisito parcial para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral

SÃO LUÍS

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Sousa, Alexandre Pereira Sousa.

O QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA EUDLICIANA COMO
FUNDAMENTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA UMA
INTRODUÇÃO NO ÂMBITO EDUCACIONAL / Alexandre
Pereira

Sousa Sousa. - 2025.

61 p.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Coelho
Amaral

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, Centro
Tecnológico,
2025.

1. Geometria Euclidiana. 2. Quinto Postulado. 3.
Geometria Hiperbólica. I. Amaral, Prof. Dr. Luís
Fernando
Coelho Amaral. II. Título.

**O QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA EUDLICIANA COMO
FUNDAMENTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA UMA
INTRODUÇÃO NO ÂMBITO EDUCACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à
Coordenadoria dos Cursos de Matemática da
Universidade Federal do Maranhão como
requisito parcial para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática.

Trabalho: APROVADO. São Luís – MA 25/02/2025

Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral (Orientador)

DEMAT / CCE T/ UFMA

Prof. Me. Artur Silva Santos

DEMAT / CCET / UFMA

Profa. Esp. Laila Judith Fernandes Moura

DDE-ROS / IFMA

*A meu pai Raimundo Pereira Sousa, meu avô
Jose Costa Fernandes e a meu neto João
Vicente Lobo Sousa que me renovou as forças,
e a Katiana Carvalho da Silva pela ajuda e
incentivo. Obrigado!*

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão a Deus e a Nossa Senhora que protegeram a mim, minha família e todos que convivem comigo. Obrigado!

“Os únicos princípios que eu aceito, ou necessito, na Física são os da Geometria e da Matemática pura; estes princípios explicam todos os fenômenos naturais, e nos permitirão fazer demonstrações bastante acertadas a respeito deles.”

René Descartes

RESUMO

O presente estudo tem como objeto a geometria não euclidiana, em particular, a geometria hiperbólica no contexto do ensino e da aprendizagem da matemática e da formação do professor de matemática. Trata-se de um estudo de abordagem qualitativa, cuja pesquisa é idealizada a partir monografias, artigos, dissertações, teses e livros que tratam do assunto mencionado na bibliografia deste estudo. A Geometria é uma ciência de natureza lógica e dedutiva, sendo estabelecida por conceitos iniciais como ponto, reta e plano como também postulados e as noções comuns. Nestas condições Euclides organizou todo o conhecimento da época sobre a geometria em seu famoso livro *Os Elementos*. Euclides começou o desenvolvimento de seu trabalho utilizando cinco postulados, que seriam aceitos como base e nesse ensejo, o quinto, conhecido como postulado das paralelas se destacou, devido à forma como se apresentava causando grande polemica em razão de trazer na sua essência inquietações filosóficas, mencionadas por todos os estudiosos que mantinham contato com a obra. Muitos desses estudiosos ao longo da história afirmavam que se tratava de uma proposição e buscavam então, uma demonstração. Entre esses estudiosos encontravam-se matemáticos e filósofos como também oportunistas que se sentiam desafiados e viam nesse desafio a oportunidade da fama e, nestas condições, enveredavam-se na busca de solucionar o misterioso postulado. E o problema que parecia elementar, agigantou-se, tornando-se por mais de dois milênios um desafio colossal. Em torno das tentativas de demonstração, foram descobertas novas formas de interpretação do quinto postulados como também uma nova geometria, a *Geometria Hiperbólica*, em que contradizia o quinto postulado e afirmava que *por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas a reta dada*, ou seja, uma infinidade de retas paralelas. Foi então o começo de uma serie de resultados novos, que influenciaram o conhecimento geométrico em torno do quinto postulado e que vieram a contribuir com a descoberta e consolidação da Geometria Hiperbólica e de sua consistência. Esses resultados, apesar de diferentes e distantes de alguns resultados da Geometria Euclidiana, possuem um encadeamento lógico que contribuíram com vários ramos da ciência.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Quinto Postulado, Geometria Hiperbólica.

ABSTRACT

The present study focuses on non-Euclidean geometry, specifically hyperbolic geometry within the context of mathematics teaching and learning, as well as the training of mathematics teachers. This is a qualitative study, with research based on monographs, articles, dissertations, theses, and books that address the subject matter mentioned in this study's bibliography. Geometry is a science of a logical and deductive nature, established by initial concepts such as point, line, and plane, as well as postulates and common notions. Under these conditions, Euclid organized all the knowledge of the time about geometry in his famous book *The Elements*. Euclid began the development of his work using five postulates, which would be accepted as a basis, and in this opportunity, the fifth, known as the parallel postulate, stood out due to the way it was presented, causing great controversy because it brought in its essence philosophical concerns, mentioned by all scholars who had contact with the work. Many of these scholars throughout history argued that it was a proposition and sought, therefore, a demonstration. Among these scholars were mathematicians and philosophers, as well as opportunists who felt challenged and saw in this challenge the opportunity for fame, and, under these conditions, embarked on the search to solve the mysterious postulate. And the problem that seemed elementary, grew, becoming for more than two millennia a colossal challenge. Around the attempts of demonstration, new forms of interpretation of the fifth postulate were discovered, as well as a new geometry, Hyperbolic Geometry, which contradicted the fifth postulate and stated that through a point outside a line pass at least two lines parallel to the given line, that is, an infinity of parallel lines. It was then the beginning of a series of new results, which influenced the geometric knowledge around the fifth postulate and which contributed to the discovery and consolidation of Hyperbolic Geometry and its consistency. These results, despite being different and distant from some results of Euclidean Geometry, have a logical chain that contributed to various branches of science.

Keywords: Euclidean geometry, Fifth postulate, Hyperbolic geometry.

LISTA DE FIGURA

Figura 1	Arte Rupreste	15
Figura 2	Civilizações Egípcia e Babilônica e seus grandes rios	16
Figura 3	Estiradores de Cordas	17
Figura 4	Papiro de Golonishev ou de Moscou	18
Figura 5	Papiro de Rhind	18
Figura 6	Tales e altura das pirâmides	19
Figura 7	Cálculo do raio da Terra e a distância do Sol e da Lua por Erastóstenes	20
Figura 8	Euclides de Alexandria	21
Figura 9	A Escola de Atenas – Afresco de Rafael 1509 - 1510	21
Figura 10	Capa de Os Elementos de Euclides	25
Figura 11	Os Elementos de Euclides - Bicudo	25
Figura 12	David Hilbert	30
Figura 13	Quadriláteros de Ibn Qurra	34
Figura 14	Quadriláteros onde os ângulos da base $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$	34
Figura 15	Quadriláteros de Saccheri	36
Figura 16	Hipótese HAR	37
Figura 17	Hipótese HAO	37
Figura 18	Hipótese HAA	37
Figura 19	Carl Friedrich Gauss 1777 - 1855	38
Figura 20	Immanuel Kant	39
Figura 21	Farkas Bolyai	41
Figura 22	Janus Bolyai	42
Figura 23	O raio BN paralelo ao raio AM – Geometria de Bolyai	44
Figura 24	Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856)	46
Figura 25	Retas Paralelas Hiperbólicas	47
Figura 26	$P \notin r - s_1$ e s_2 são paralelas a r .	49
Figura 27	$P \notin r - s_1, s_2, s_3, s_4$ e s_5 são paralelas a r .	49
Figura 28	Apoio 1 para a demonstração – Afirmação 1	51
Figura 29	Apoio 2 para a demonstração – Afirmação 1	51

Figura30	Apoio 3 para a demonstração – Afirmação 1	52
Figura 31	Apoio 4 para a demonstração – Afirmação 1	52
Figura 32	Quadrilátero Hiperbólico	53
Figura 33	Plano de Poincaré	55
Figura 34	Plano de Poincaré	55
Figura 35	Semi - Plano de Poincaré	55
Figura 36	Modelo de Beltrami	55
Figura 37	Modelo de Beltrami - Pseudoesfera	55
Figura 38	Pseudoesfera	55
Figura 39	O Plano de Klein	56
Figura 40	: r_1 , r_2 e r_3 são retas paralelas à reta r passando pelo ponto P no Plano de Klein	56

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Justificativa da Pesquisa	11
1.2	Problematização	13
1.3	Objetivos da Pesquisa	13
	1.3.1 Objetivo Geral	13
	1.3.2 Objetivos Específicos	13
CAPÍTULO 2	A GEOMETRIA	15
2.1	Contando uma história	15
2.2	Explanando sobre Euclides de Alexandria	20
2.3	Tentativas de demonstração do Quinto postulado	31
2.4	Alguns registros de tentativa de demonstração do Quinto postulado	32
2.5	A contribuição de Giovanni Girolamo Saccheri	34
CAPÍTULO 3	UMA GEOMETRIA INTUITIVA	38
3.1	Uma Geometria diferente	38
	3.1.1 Carl Friedrich Gauss	38
	3.1.2 Farkas Bolyai	41
	3.1.3 Janos Bolyai	42
	3.1.4 Nicolay Ivanovich Lobachewsky	46
CAPÍTULO 4	UMA CONSISTENTE GEOMETRIA	49
4.1	A Geometria Hiperbólica	49
4.2	Alguns Resultados	50
	4.2.1 Afirmação 1	50
	4.2.2 Afirmação 2	52
4.3	Consistência e Modelos da Geometria Hiperbólica	54
	4.3.1 Consistência	54
CONCLUSÃO		57
REFERÊNCIAS		58

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos reflexões que abordam sobre a importância do ensino da Geometria Não Euclidiana, como embasamento básico para a formação do professor de Matemática. Durante toda a formação é construída, em algumas Universidades, uma lacuna relativa à ausência deste conhecimento que às vezes nem é percebida em razão de sequer ser mencionado na formação do professor de Matemática. Trata-se de um conteúdo que deve ser exposto como política de educação continuada em razão de ser um conhecimento científico atual. A Geometria Não Euclidiana, obtida da Negação do Quinto Postulado de Euclides, se apresenta como uma mudança de paradigmas da Ciência moderna, identificadas desde o Século XIX a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica, ambas, são fruto da Negação do Quinto Postulado da Geometria Euclidiana.

1.1 Justificativa da Pesquisa

Há uma polêmica relativa ao ensino da matemática quando o assunto é ensinar a geometria. O ensino desta disciplina em sala de aula costuma ser muito desprestigiado ou mesmo controverso, em razão que, de vez em quando, escutamos aquela pergunta feita para Euclides há mais de dois mil e setecentos anos, “o que se ganha em aprender geometria?” isso acontece principalmente no início da escolarização, o ensino fundamental e, até pouco tempo esse fato era facilmente observado em razão dos livros didáticos trazerem no bojo de seus conteúdos a geometria somente nos últimos capítulos, com objetivo claro de serem abordado nos momentos finais do ano letivo, onde professores e alunos já estavam dominados pelo cansaço de final de ano; isso há bem pouco tempo.

Mesmo os livros didáticos corrigindo o erro, isto é, colocando os conteúdos de geometria nos capítulos iniciais, professores da disciplina, por vícios ou comodidade, recolocavam para que fossem trabalhados nos últimos momentos. Além disso, existe outro problema aquele em que uma quantidade significativa de nossos colegas professores possuírem suas preferências que conflitavam com o ensino da geometria trabalhavam melhor a álgebra e a aritmética e, por isso, relegavam a geometria e ainda “diziam” que era em razão de não saberem desenhar ou por falta de segurança mesmo, uma vez que, trabalhar axiomas, postulados e teoremas, era chato e complicavam o

contato entre professor e aluno, além do que, esses professores, desde a universidade, foram estimulados a se distanciar da geometria bem como de sua história.

Durante toda minha trajetória escolar, jamais houve situações em que a Geometria de Euclides não tivesse sido tratada como única que existe para descrever e interpretar o espaço. Pensar na existência de outras geometrias instigou minha curiosidade. (Cavichiolo, 2011, p.11)

De fato, pelo exposto em vários trabalhos científicos, o ensino da geometria euclidiana impõe dificuldades, imagina então, o ensino vinculado às geometrias não euclidianas que normalmente nem são abordadas na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática pelo País; esse fato nos leva a seguinte reflexão: Se aos próprios professores em sua formação acadêmica é negado à possibilidade de conhecer as geometrias não euclidianas, o que esperar do aluno desse professor, relativo a esse saber?

A geometria hiperbólica, por exemplo, é uma geometria não euclidiana que surgiu da negação do quinto postulado; estuda-la possibilita uma visão crítica do espaço em que vivemos, sem ela, a humanidade não teria dado os primeiros passos para contribuir com a base matemática para o físico teórico Albert Einstein (1879 - 1955) desenvolver a teoria do espaço curvo.

A descoberta das geometrias não euclidianas é um capítulo fascinante da história da Matemática, que se inicia no próprio momento em que Euclides trouxe a público os Elementos, em que apresentava a Geometria euclidiana numa forma axiomática, e só termina na primeira metade do século XIX. (Barbosa, 2002, s.p.iii)

Há muito tempo convivemos com a urgência de ampliar os estudos sobre possíveis abordagens didáticas que poderiam ser propostas para melhorar o ensino da matemática, em particular o ensino da geometria e o que está relacionado a ele, com base, claro em sua efervescente e revolucionária história. Uma das maneiras de fazer isso é melhorar nosso relacionamento com a dinâmica dos fatos históricos, bem como fazer conhecer os personagens que conduzidos pela curiosidade se envolveram e deram significativa contribuição para a humanidade que avançou.

Nestas condições, através desta pesquisa, buscamos estimular um desafio para professores e alunos, que seria o envolvimento de seus estudos com o desafiante saber

vinculado a geometria não euclidiana, estimulando estratégias de pensamento e assim, chegar ao aprofundamento deste instigante saber.

[...] o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. [...] (BRASIL, 1977, p. 39).

1.2 Problematização

A Situação Problema parte do reconhecimento dos conceitos da geometria euclidiana como amplamente aplicados e compreendidos no ensino fundamental e no ensino médio. Por sua vez, a geometria hiperbólica, apesar de sua relevância em áreas como física, astronomia e tecnologia, permanece pouco explorada nesse contexto. Nestas condições perguntamos como introduzir conceitos de geometria hiperbólica de forma acessível para despertar o interesse e a compreensão de alunos e professores?

1.3 Objetivos da Pesquisa

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral nos conduz no rumo de seguinte reflexão - embora a geometria euclidiana seja amplamente desenvolvida e aplicada, outras geometrias, como a geometria hiperbólica, possuem grande relevância em contextos teóricos e práticos, incluindo aplicações na física, teoria da relatividade, e na modelagem de redes. Nestas condições, deseja-se promover aos estudantes de matemática e áreas afins que muitas vezes enfrentam dificuldades a compreender os conceitos fundamentais da geometria hiperbólica.

1.3.2 Objetivos Específicos

Devido à falta de introduções acessíveis ao conhecimento da geometria não euclidiana, em particular da geometria hiperbólica, busca-se conectar este conhecimento com os seguintes objetivos específicos.

- Analisar os fundamentos históricos e teóricos que conduziram ao desenvolvimento da geometria hiperbólica, destacando os principais eventos e pensadores que contribuíram para a sua criação.
- Explicar os conceitos e axiomas centrais da geometria hiperbólica, enfatizando suas distinções em relação à geometria euclidiana, como a não validade do quinto postulado de Euclides.
- Apresentar e comparar os modelos mais comuns de geometria hiperbólica, como o modelo do disco de Poincaré e o modelo do semi-plano de Poincaré, descrevendo suas características e propriedades.
- Ilustrar a teoria da geometria hiperbólica na resolução de problemas e na visualização de conceitos abstratos, demonstrando como essa geometria pode auxiliar na compreensão da geometria não euclidiana.

Nestas condições, o objetivo deste estudo é motivar a conjuntura do processo de ensino aprendizagem da geometria, ressaltando intuitivamente a docentes e discentes a importância em ter como aliado o conhecimento da geometria euclidiana e da geometria não euclidiana. Nossa caminhada é na direção de reconhecer que a visão de mundo, segundo o avanço dos conhecimentos em geometria mudou, em razão de que antes víamos o mundo conforme Isaac Newton (1643 -1727) e hoje fomos arrebatados por uma nova estrutura de conhecimento que enxerga o universo segundo Albert Einstein, ou seja, a Teoria da Relatividade Geral, ou mesmo a Teoria da Relatividade Restrita, existem e estão à frente.

.

CAPÍTULO 2: A GEOMETRIA

Neste capítulo exploramos a história da geometria, focando no desenvolvimento da geometria não euclidiana. Explicitamos as discussões em torno do quinto postulado de Euclides, destacando as contribuições de matemáticos importantes e apresentando resultados que conduziram a descoberta da geometria hiperbólica.

2.1 – Contando uma história

O vocábulo Geometria é resultado da junção de duas palavras de origem Grega, precisamente geo = terra e metrein = medir, gerando geometrein, que tem como significado “Medir a Terra”.

A geometria estava intimamente ligada às práticas cotidianas do plantio, construções e movimento dos astros desenvolvidos nas civilizações egípcia, babilônica e assíria. Era comum usar esses conhecimentos para cálculo de áreas, volumes e superfícies sem se importar em comprovações. Essas civilizações mantinham uma relação com o conhecimento da geometria de caráter meramente pragmático.

Na verdade não se sabe qual a civilização deu os primeiros passos na direção desse saber. Além disso, pinturas rupestres descobertas em cavernas indicam manifestações artísticas em épocas bem remotas. Tais manifestações apontam para a existência de conceitos matemáticos e geométricos, como dimensão e forma, elementos que acusam naquele momento a presença da protogeometria¹.



Figura 1: Arte Rupreste
Fonte: sme.goiania.go.gov.br

[...] as pinturas rupestres documentam um nível artístico de realização inigualável em épocas posteriores. Elas também indicam uma compreensão do espaço e da forma que certamente teria garantido a formação de conceitos

¹ Protogeometria é a primeira etapa da representação da quantidade, do espaço e do tempo.

matemáticos e geométricos, se o desejo ou necessidade de fazê-lo existisse naquele momento. Mas isso pode não ter sido o caso há mais de 30.000 anos. [...] As pinturas podem muito provavelmente terem servido como um veículo mágico para ganhar controle sobre a natureza, para lançar um feitiço sobre o jogo, garantindo assim uma caçada bem-sucedida. Mas um propósito de registrar eventos, enumerar itens, descrever movimentos e relações espaciais também pode estar presente. Pode-se dizer que tais documentos contêm elementos de Protogeometria: a primeira etapa da representação da quantidade, do espaço e do tempo, senão ainda uma representação verdadeiramente abstrata. (Holme, 2010, p.3-4, tradução nossa)

A geometria, nestas condições, está presente no cotidiano da vida humana desde seu alvorecer contribuindo com desenhos que fixaram a história, bem como, na construção de formas de moradia, artefatos para medir o tempo e armas para caça.

As civilizações como Egípcia e Babilônica se desenvolveram as margens de grandes rios. O Egito a margem do rio Nilo e a Babilônia às margens dos rios Tigres e Eufrates.

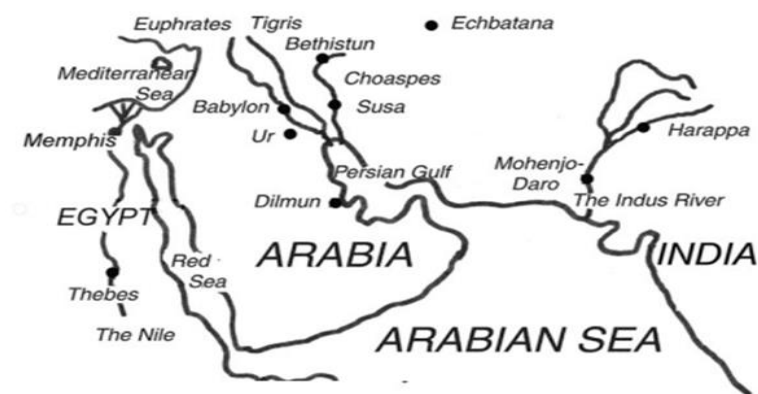


Figura 2: Civilizações Egípcia e Babilônica e seus grande rios
Fonte: Holme, 2010, p.8

“O Egito é uma dádiva do Nilo”, frase encontrada em livros de história antiga e também em filmes, em razão de todos os anos o rio Nilo inundar o seu delta, e quando suas águas baixavam o terreno situado em torno se tornavam campos de cultivo cujas lamas aluviais ricas em nutrientes com húmus enriquecia o solo tornando o delta do Nilo o mais fértil e lavrável do mundo antigo.

Toda aquela terra fértil, fonte de riquezas, produzia conflitos entre indivíduos e comunidades, motivados pelo direito ao uso e a quantidade da terra que precisava ser definida, delimitada para então poder ser trabalhada.

No Egito, surgiram então, os arpedonaptas ou “estiradores de corda”, escribas que eram os técnicos, os primeiros agrimensores, nomeados pelo Faraó, que usavam cordas como régua, esquadro e compasso. Através do trabalho dos arpedonaptas era

possível medir distâncias, traçar linhas perpendiculares e desenhar círculos, o que em relação à geometria, eram técnicas sofisticadas em razão de contar com o uso de instrumentos.

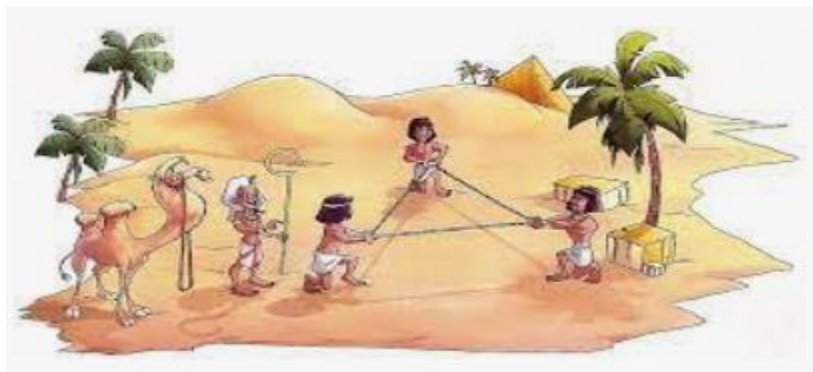


Figura 3: Estiradores de cordas
Fonte: iffmauricio.pbworks.com

Os Estiradores de Cordas desenvolveram o cálculo das áreas cultivadas dividindo-as em forma de triângulos cuja área $A_T = \frac{1}{2}(base) \cdot (altura)$ e retângulo de área $A_R = (base) \cdot (altura)$. Para as superfícies irregulares, os Estiradores de Cordas utilizavam o método de dividir um campo em porções triangulares cujas áreas somadas resultavam a área total envolvida.

Os papiros de Moscou e Rhind, datados de aproximadamente 1850 a.C. e 1650 a.C. e preservados nas pirâmides, fizeram chegar até nós a fórmula para o cálculo de tronco de uma pirâmide de base quadrada.

O papiro Rhind, embora seja datado de séculos à frente ao papiro de Moscou, o escriba de nome Ahmes, apontado como o responsável por calcular o comprimento de uma circunferência e da área de um círculo, deixa claro que copiou possivelmente o escrito duzentos anos antes, nestas condições, acrescentando mais importância a esse documento.

Ahmes percebe a existência da relação entre o raio e o comprimento da circunferência, isto é, o comprimento de uma circunferência é sempre cerca 6,28 vezes seu raio. A área do círculo, por sua vez, foi encontrada, há cerca de 2000 a.C., relacionando a área do quadrado e a área do círculo.



Figura 4: Papiro Golonishev ou de Moscou
Fonte: matemática.br (2023)



Figura 5: Papiro Rhind
Fonte: matematicaefacil.com.br (2023)

O próximo grande avanço na geometria deve-se aos gregos. Através desse povo a atividade empírica baseia-se no desenvolvimento de um sistema de regras que impunham aceitar resultados práticos através de uma dedução de caráter lógico, em vez de tentativas e erros, que validava a atividade matemática.

Tales nascido em Mileto em 624 a.C. antiga colônia grega na Ásia Menor, hoje Turquia, é o percussor desta inquietação e maior referência de seu tempo. É considerado o primeiro matemático e o primeiro filósofo da tradição ocidental.

Segundo Mlodinov (2010, p.23) Tales foi um próspero e rico comerciante que ao se aposentar viajou pela Babilônia, Egito e Assíria em busca de conhecimento.

Tales viveu numa época quando, ao redor do mundo, uma luz iluminava, de um jeito ou de outro, despertando a mente humana. Na Índia, Sidarta Buda, nascido a cerca de 560 a. C., começou a determinar o Budismo. Na China Lao Tsé e Confúcio, seu contemporâneo mais jovem, nascido em 551 a. C., fizeram progresso intelectual de enorme consequência. [...] (Mlodinov, 2010, P.23)

Tales, em sua jornada, por volta de anos 600 a.C. calcula a alturas de pirâmides egípcias e em 585 a.C. prevê um eclipse.

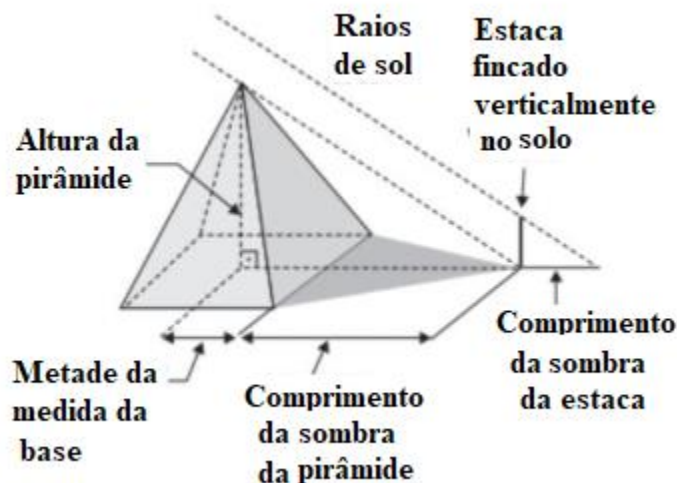


Figura 6: Tales e a altura das pirâmides
 Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/28731729>

Segundo Pinasco *et al.* (2009, p.14) “Tales é o primeiro matemático a quem se atribui uma série de resultados teóricos gerais. Embora não se saiba como ele os demonstrou originalmente” estes resultados, que listamos abaixo, fazem parte da geometria básica hoje:

- Os ângulos opostos pelos vértices são iguais.
- Dadas duas paralelas e uma transversal, os ângulos alternos internos são congruentes.
- Um diâmetro divide um círculo em duas partes iguais.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.
- Um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.

Segundo Greenberg (1994, p.7) “A sistematização iniciada por Thales foi continuada ao longo dos próximos dois séculos por Pitágoras e seus discípulos”. E os fatos iam se sucedendo e construindo a história após Tales. Eratóstenes (276-194 a.C.) calcula o raio da Terra com grande precisão e estima a distância do Sol e da Lua; Apolônio (262-190 a.C.), estuda as seções cônicas. Estas curvas denominadas de elipses, parábolas e hipérboles, a princípio não tinham uma aplicação prática, mas, em 1609, Kepler descobriu que os movimentos dos planetas não estavam associados a um movimento circular, mas que, viajavam em trajetórias elípticas ao redor do Sol. Galileu Galilei também contribui com o estudo das cônicas ao afirmar que o lançamento de projétil descrevia uma parábola e Newton, já século XVII, postulou a Lei da Gravitação

Universal, e deduziu que as únicas órbitas possíveis para o movimento dos objetos celestes eram, precisamente, essas três curvas.

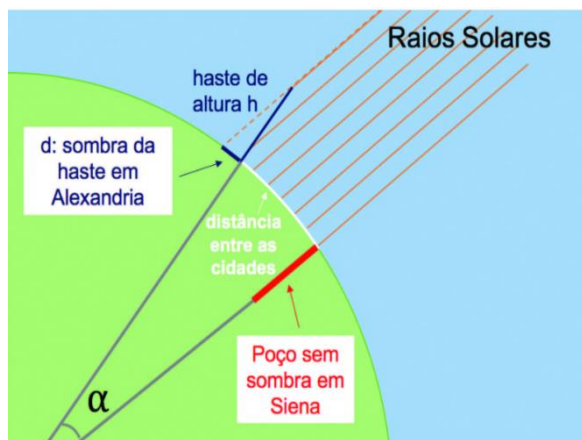


Figura7: Calcula o raio da Terra e da distância do Sol e da Lua por Erastóstenes

Fonte: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/cZBNSFdKprSQRwZRkfLrnQL>

2.2 Explanando sobre Euclides de Alexandria

Voltando no tempo, vamos comentar um pouco sobre Euclides de Alexandria. Após a morte de Alexandre, o Grande, em 323 a.C., seu imenso império, que se estendia da Grécia até a Índia, foi dividido entre seus generais, conhecidos como Diádocos. Essa divisão deu início a um período de intensas disputas e guerras pelo poder. No Egito, coube a Ptolomeu I Sóter, um dos generais mais próximos de Alexandre, estabelecer um novo reino. Ptolomeu, que também era amigo de infância e possivelmente meio-irmão de Alexandre, fundou a dinastia ptolemaica, que governaria o Egito por quase três séculos. Sob o domínio da dinastia Ptolomaica, o Egito se tornou um centro cultural e intelectual de grande importância no mundo helenístico, com a famosa Biblioteca de Alexandria e o Museu, instituição religiosa e científica que existiu na cidade de Alexandria, como símbolos de sua prosperidade.

Segundo Boyer (1974, p.74), em 306 a.C., Ptolomeu I consolidou seu domínio sobre o Egito, anteriormente parte do império de Alexandre, o Grande. Determinado a transformar sua nova conquista em um centro de excelência cultural e intelectual, Ptolomeu I iniciou um ambicioso programa de construção e inovação. O ponto culminante desse projeto foi à criação do Museu, mencionado no parágrafo anterior, localizado na cidade de Alexandria, uma instituição que reunia estudiosos de diversas áreas do conhecimento, como ciências, literatura e filosofia. O Museu se tornou um polo de atração para grandes mentes da época, e entre os sábios que se juntaram a essa

comunidade estava Euclides, o renomado matemático grego, cuja obra "Os Elementos" se tornaria a base da geometria por séculos.



Figura 8: Euclides de Alexandria
Fonte: pt.wikipedia.org (2023)



Figura 9: A Escola de Atenas - afresco de Rafael - 1509–1510
Fonte: Holme(2010, p.32)

A morte de Alexandre, o Grande, levou a disputas entre os generais do exército grego; mas em 306 a.C. o controle da parte egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I, e esse governante pode voltar a atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros atos está a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como Museu, insuperado em seu tempo. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles o autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos – Os elementos (stoichia) de Euclides (BOYER, 1974, p.74).

Para criar a nova civilização em Alexandria, eles precisavam da ajuda de outros gregos, não só soldados e comerciantes, mas também intelectuais de vários tipos, administradores, filósofos, professores, poetas, artistas e homens de ciência (SARTON, 1959, p.6, tradução nossa).

Segundo Eves (2005, p. 167) a vida e a personalidade de Euclides permanecem um enigma para a história. Pouco se sabe sobre o matemático, a não ser por sua possível atuação como professor na famosa Escola de Matemática de Alexandria, que ele próprio contribuiu para a sua fundação. A falta de informações sobre Euclides se estende à sua data e local de nascimento. Apesar disso, é evidente que possuía uma sólida formação matemática, com indícios de que teria sido aluno de Platão ou frequentado a escola platônica de Atenas.

Euclides, além de um matemático brilhante, era conhecido por sua firmeza como professor. Histórias pitorescas sobre suas aulas ilustram essa característica. Em uma ocasião, narrada por Stobaeus, um aluno questionou a utilidade prática da geometria. Euclides, demonstrando sua crença no valor intrínseco do conhecimento, chamou um escravo e ordenou que lhe desse uma moeda, afirmando ironicamente que o aluno aparentemente só valorizava o aprendizado caso houvesse recompensa financeira.

Outro episódio envolveu o próprio rei Ptolomeu, que, buscando um atalho para dominar a geometria, perguntou a Euclides se não haveria um caminho mais curto para aprendê-la. A resposta do mestre foi categórica: "Não há estradas reais na geometria". Com essa frase, Euclides enfatizou que o estudo da geometria exige dedicação, esforço e rigor, independentemente da posição social.

Euclides foi o primeiro administrador da extraordinária Biblioteca de Alexandria, que segundo Eves (2005, p.167), chegou a ter 600.000 rolos e infelizmente extinta por um incêndio, 48 a.C. quando o imperador Júlio César mandou atacar a cidade.

A obra-prima de Euclides, "Elementos" (em grego, Stoichia), escrita por volta de 300 a.C. é um marco na história da matemática. Essa monumental obra compila e sistematiza o conhecimento matemático da época, abrangendo aritmética, álgebra e geometria. "Os Elementos" são compostos por 13 livros, que não se limitam a apresentar as descobertas do próprio Euclides. A obra preserva e organiza o conhecimento matemático acumulado até então, incluindo trabalhos de outros

estudiosos. De acordo com Boyer (1974, p.74), "Os Elementos" e "A Esfera" de Autólico são os tratados científicos gregos mais antigos que chegaram completos aos nossos dias, o que demonstra a importância histórica e a influência duradoura da obra de Euclides.

Embora tenha havido versões anteriores dos Elementos antes de Euclides, a sua é a única a ter sobrevivido, talvez porque foi a primeira a ser escrita após os fundamentos, tanto da teoria das proporções como da dos irracionais, terem sido desenvolvidos na escola de Platão e de terem sido propostas por Aristóteles as cuidadosas distinções a serem sempre feitas entre número e magnitude (KATZ. 2010, p. 75).

Claramente a concepção de Os Elementos induz à percepção de que em sua construção não foram agregados aspectos práticos. Percebemos que sua intenção era é alicerçar uma base de aspectos lógicos, que viesse a fundamentar a matemática.

Assim,

O manifesto da revolução original da geometria foi escrita por um homem misterioso chamado Euclides [...] a geometria euclidiana é, de fato, uma matéria emocionante, e a bela obra cujo impacto rivaliza como da Bíblia, e cujas ideias são tão radicais quanto às de Marx e Engels [...] (MLODINOW, 2010. p.11).

A obra "Os Elementos" de Euclides é um marco na história da matemática, responsável por universalizar conceitos e propor desafios que revolucionaram a forma como entendemos o universo. Trata-se de uma obra que estabeleceu um sistema lógico dedutivo a partir de noções iniciais (axiomas, postulados, definições e propriedades), que servem como alicerces para a construção do conhecimento matemático.

Euclides, nessa obra, compilou e organizou o conhecimento matemático da época, incluindo trabalhos de Tales de Mileto, Eudoxo, Platão, Teeteto e Hipócrates de Quio. Ele organizou o conhecimento geométrico da época em um sistema lógico dedutivo, baseado em noções iniciais e na construção de teoremas a partir delas.

"Os Elementos" não se limitam à geometria, mas também aborda álgebra e aritmética, demonstrando a amplitude do conhecimento matemático da época. A obra é uma das mais influentes da história da matemática, com edições que só perdem para a Bíblia, e representa a mais antiga publicação grega que chegou até nós.

Em resumo, "Os Elementos" de Euclides é uma obra fundamental que sistematizou o conhecimento matemático da época, estabeleceu um sistema lógico dedutivo e influenciou profundamente o desenvolvimento da matemática ao longo dos séculos.

Os elementos de Euclides superaram de tanto seus competidores que foram os únicos a sobreviver. Não era, como se pensa às vezes, um compêndio de todo o conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introduzido cobrindo toda a matemática elementar – isto é, aritmética (no sentido de “teoria dos números”), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica) (BOYER, 1974, p.76).

A Fundação sistemática da Geometria plana pela escola de Pitágoras foi trazida a uma conclusão em torno de 400 a.C. nos Elementos pelo matemático Hipócrates. [...] Embora este Tratado tenha sido perdido, podemos afirmar com segurança que cobriu a maioria dos livros I-IV dos elementos de Euclides, que apareceram cerca de um século depois. [...] Os pitagóricos nunca foram capazes de desenvolver uma teoria de proporções que também era válido para comprimentos irracionais. Isso foi mais tarde alcançado por Eudoxo, cuja teoria foi incorporada no livro V dos elementos de Euclides (GREENBERG, 1994, p.7–8, tradução nossa).

O conteúdo dos treze livros de Os Elementos, de Euclides foi organizado da seguinte forma:

- Geometria Plana Elementar

Livro I – Os fundamentos da geometria

Livro II – Álgebra geométrica

Livro III – Teoria da circunferência

Livro IV – Figuras inscritas e circunscritas

Livro V – Teoria das proporções abstratas

Livro VI – Figuras geométricas semelhantes e proporcionais

- Teoria dos Números

Livro VII – Fundamentos da teoria dos números

Livro VIII – Continuação de proporção e teoria dos números

Livro IX – Teoria dos números

- Incomensuráveis

Livro X – Classificação dos incomensuráveis

- Geometria no Espaço

Livro XI – Geometria dos sólidos

Livro XII – Medição de figuras

Livro XIII – Sólidos regulares

Euclides, com sua obra "Os Elementos", deu início ao método axiomático, um marco na história da matemática que organiza o conhecimento de forma lógica e sistemática. O Livro I, em particular, é fundamental nesse processo, apresentando 23 definições que servem como base para o desenvolvimento da geometria.



Figura 10: Capa: de Os elementos de Euclides

Fonte: <https://www.grupoescolar.com/pesquisa/os-elementos-de-euclides.html>

É importante notar que algumas dessas definições, como as de ponto, reta e superfície, são consideradas primitivas, ou seja, não se baseiam em conceitos anteriores. Euclides as apresenta de forma intuitiva, como "um ponto é o que não tem partes", "uma reta é comprimento sem largura" e "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura" (Boyer, 1974, p.77).

A tradução de "Os Elementos" feita pelo professor Irineu Bicudo (1940-2018) destaca as definições de ponto, linha (reta) e superfície (plano), além dos cinco postulados e das nove noções comuns, que constituem os pilares do sistema lógico desenvolvido por Euclides.

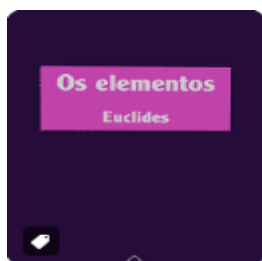


Figura11: Os Elementos de Euclides

Fonte: Bicudo, 2009

O Livro I de "Os Elementos" de Euclides demonstra a força do método axiomático. A partir de definições, postulados e noções comuns, Euclides deduz uma série de proposições e teoremas de forma rigorosa. Essa abordagem dedutiva estabeleceu um modelo para a organização do conhecimento matemático e influenciou o desenvolvimento da ciência por séculos. O Livro I apresenta os fundamentos da geometria euclidiana, incluindo conceitos como: ponto, reta e plano além de estabelecer os primeiros teoremas sobre triângulos e outras figuras geométricas.

Listamos abaixo definições, postulados e noções comuns segundo Euclides.

▪ Definições

1. Ponto é aquilo de que nada parte.
2. Linha é comprimento sem largura.
3. Extremidades de uma linha são pontos.
4. Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesmos.
5. Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

▪ Postulados

- 1º. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- 2º. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- 3º. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- 4º. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- 5º. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

▪ Noções Comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área

Nestas condições "Os Elementos" de Euclides é uma obra fundamental na história da matemática, que estabeleceu um sistema lógico rigoroso baseado em cinco axiomas e cinco postulados. A partir desses dados iniciais, Euclides construiu 465 proposições, demonstrando um método dedutivo que influenciou a matemática por séculos.

O Livro I, em particular, apresenta a Geometria Euclidiana, construída a partir de cinco postulados, cinco noções comuns e definições básicas. O Quinto Postulado, conhecido como Postulado das Paralelas gerou dúvidas e questionamentos ao longo da história, desafiando matemáticos equivocadamente a provar sua validade a partir dos quatro primeiros postulados. Dessa busca de uma possível demonstração para o Postulado surgiram questionamentos sobre a própria Geometria Euclidiana, abrindo caminho para o desenvolvimento de novas geometrias chamadas não euclidianas.

Se considerarmos os postulados 1, 2, 3, 4, eles parecem de enunciado fáceis e, em verdade, evidentes por eles próprios. O postulado 5 é diferente. É de enunciado complicado e muito menos evidente por si próprio. Parece transcender à experiência física direta (DAVIS; HERSH, 1985, p.252).

A complexidade e a dificuldade do quinto postulado eram evidentes para Euclides, que evitava usá-lo em suas demonstrações, evidenciando seu reconhecimento da natureza problemática desse postulado.

O Quinto Postulado de Euclides, equivalente à Proposição 17 do Livro I, afirma que

"dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo que se quiser, são menores que dois retos", foi considerado por muitos matemáticos como uma proposição, e não um postulado. O que gerou a busca por sua demonstração.

Segundo Próclus (411 - 485), "Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu, em certo livro, se propôs resolver... A asserção de que duas linhas retas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível, mas não necessária. [...] É claro, portanto, que devemos procurar

uma demonstração do presente teorema, e que este é estranho ao carácter especial dos postulados” (GREENBERG, 1994, p.149, tradução nossa).

[...] o próprio Euclides não confiava muito nesse postulado ser demonstrado pelo fato de ele ter adiado usá-lo em uma prova pelo maior tempo possível - até sua 29ª proposição. [...] Deve-se enfatizar que a maioria dessas tentativas foram feitas por matemáticos proeminentes, não por incompetentes. E até mesmo, embora cada tentativa tenha sido falha, o esforço não era geralmente desperdiçado, pois, supondo que todos, exceto um passo, pudessem ser justificados, quando detectamos o passo defeituoso, encontramos outra afirmação que, para nossa surpresa, é equivalente para o postulado das paralelas (GREENBERG, 1994, p.148-149, tradução nossa).

Segundo Sousa (2019, p.62) o mistério continuava em razão de Euclides ter passado a usar o Quinto Postulado a partir da Proposição 29 do livro I, “A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto, e os interiores, e no mesmo lado, igual a dois retos”. O que conduzia ainda mais na direção de uma suposta demonstração desse postulado.

Através do quinto postulado de Euclides, foi estabelecido o primeiro e mais influente modelo para o espaço físico: a Geometria Euclidiana. Regida por postulados e axiomas, essa geometria oferecia uma estrutura lógica aparentemente perfeita para compreender o mundo ao nosso redor. No entanto, a construção da Geometria Euclidiana não se baseava apenas nos postulados e axiomas explicitamente declarados. Euclides também incorporou hipóteses implícitas que, embora não declaradas formalmente, eram essenciais para a coerência e o desenvolvimento de seu sistema.

Aqui os menciono:

a) Vale o axioma de *Pasch*: sejam A , B e C três pontos não colineares e L uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se L corta o segmento AB então ela também corta o segmento BC ou o segmento AC .

b) As retas são contínuas.

Euclides em sua obra introduziu os postulados de forma individual e elencou definições e axiomas para então deduzir às proposições. Além disso, tornou claro que o conjunto dos axiomas necessitava das propriedades:

(i) Completude: tudo que será usado na teoria este apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não hajam hipóteses implícitas.

(ii) Consistência: e impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas.

(iii) Independência: nenhum axioma e consequência de alguma combinação dos

demais.

Claro, vamos analisar cada parte do texto:

a) Axioma de Pasch e Continuidade das Retas:

- Axioma de Pasch:
 - Este axioma lida com a ordem dos pontos em um plano.
 - Ele garante que se uma reta cruza um dos lados de um triângulo, ela deve cruzar um dos outros dois lados.
 - Isso é fundamental para estabelecer relações de "estar entre" em geometria.
- Continuidade das Retas:
 - Isso significa que as retas não têm "buracos" ou interrupções.
 - Elas são conjuntos contínuos de pontos, o que é essencial para muitas construções geométricas.

Euclides e as Propriedades dos Axiomas:

Euclides, em sua obra "Os Elementos", não apenas apresentou postulados, definições e axiomas, mas também estabeleceu critérios para a qualidade de um sistema axiomático:

- (i) Completude:
 - Um sistema axiomático completo deve conter todos os conceitos e relações necessários para desenvolver a teoria.
 - Não deve haver necessidade de introduzir hipóteses adicionais não declaradas.
- (ii) Consistência:
 - Um sistema axiomático consistente não pode levar a contradições.
 - É impossível derivar duas afirmações contraditórias a partir dos mesmos axiomas.
- (iii) Independência:
 - Um axioma independente não pode ser derivado como um teorema a partir dos outros axiomas.
 - Cada axioma deve contribuir de forma única para a teoria.

Nestas condições, podemos afirmar que essas propriedades são importantes para a construção de um sistema matemático rigoroso em razão de garantirem que a teoria seja bem definida, livre de contradições e, além disso, eficiente. Ou seja, as buscas por um sistemas axiomático que satisfaça essas propriedades impulsionaram o desenvolvimento da matemática ao longo da história. O quinto postulado por não satisfazer os critérios de independência, conduziu a dúvidas e consequentemente a muitas tentativas de provas usando os outros quatro postulados. Também conduziu no rumo da criação das Geometrias não euclidianas.

Em particular,

Observando a construção do sistema axiomático de Euclides, vemos que as demonstrações de Euclides eram cheias de apelos à intuição, ou fatos alheios, com hipóteses subentendidas. A partir deste fato, no sec. XIX já era discutido e depois exigido pelos matemáticos, um trabalho mais rigoroso em relação à geometria de Euclides.

Em 1899, o matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943) apresentou sua obra, Fundamentos de Geometria, que apresentava uma sequenciam rigorosa com um encadeamento lógico - dedutivo de Os Elementos de Euclides.



Figura 12: David Hilbert (1862- 1943)

Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>

No final do século XIX “Os Elementos” de Euclides não estavam resistindo ao rigor que a lógica exigia para os fundamentos da geometria. Muitas proposições de geometria euclidiana plana faziam uso de resultados que não haviam sido demonstrados anteriormente e que não constavam do rol de axiomas, ou seja, era necessária uma reformulação dos axiomas de Euclides. A proposta que foi melhor aceita pela comunidade matemática foi a do matemático e lógico alemão David Hilbert, publicada em seu célebre trabalho “Grundlagen der Geometrie” (Fundamentos de Geometria) de 1899 onde

Hilbert coloca a Geometria Euclidiana sobre bases sólidas por meio da substituição dos cinco Postulados de Euclides por cinco grupos de axiomas, que chamou de Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axiomas de Continuidade e Axioma das Paralelas (Arcari.2008, p.12)

Hilbert toma como primitivos os conceitos de ponto, reta e plano e os considera interligados às três relações não definidas: “estar entre” e “congruência”. Também elabora o primeiro conjunto completo de axiomas da geometria euclidiana, subdividindo-os como axioma de incidência, axioma de ordem, axioma de congruência, axioma de paralelas e axioma de continuidade. Como destaque, cito que, em 1904, Hilbert provou que a geometria euclidiana é consistente se a aritmética for Consistente.

2.3 Tentativas de demonstração do quinto postulado

Na visão de Euclides, retas paralelas são definidas como aquelas que, situadas no mesmo plano, jamais se encontram, mantendo sempre a mesma distância entre si. Essa definição está intrinsecamente ligada ao Quinto Postulado. Qualquer outra definição que não se baseie nesse princípio fundamental é considerada contraditória e destituída de sentido na geometria euclidiana.

Essa ênfase na manutenção da equidistância como critério para o paralelismo ressalta a importância do Quinto Postulado na estrutura da geometria euclidiana. Ele estabelece a unicidade da reta paralela a uma dada reta por um ponto externo, garantindo a consistência e a coerência do sistema geométrico.

Ao longo dos séculos, o Quinto Postulado gerou debates e questionamentos entre os matemáticos, que buscavam demonstrá-lo a partir dos demais postulados e axiomas de Euclides. No entanto, todas as tentativas de prova se mostraram infrutíferas, o que levou à formulação de geometrias não euclidianas, nas quais o Quinto Postulado é negado ou modificado.

A definição euclidiana de retas paralelas, baseada na equidistância e no Quinto Postulado, continua sendo fundamental para a compreensão da geometria plana e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, como a física, a engenharia e a computação gráfica.

A busca incessante por demonstrar o Quinto Postulado de Euclides, utilizando apenas os quatro primeiros, gerou diversas afirmações equivalentes, chamadas de "Substitutas". Essas proposições, em conjunto com os quatro primeiros postulados, mantinham a validade da Geometria Euclidiana, oferecendo alternativas para a compreensão do famoso postulado das paralelas.

E mesmo que cada tentativa fosse falha, o esforço geralmente não foi desperdiçado; pois, assumindo que todos, exceto um passo, podem ser justificados, quando detectam o passo defeituoso, encontramos outra afirmação que, para nossa surpresa, é equivalente! ao postulado paralelo. (GREENBERG, 1994, p. 148-149, tradução nossa).

Apontamos algumas dessas afirmações Equivalentes ao Quinto Postulado:

- Equivalência (E_1) (*playfair*): Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta.
- Equivalência (E_2): Há pelos menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso.
- Equivalência (E_3) Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.
- Equivalência (E_4) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos.

.

Segundo Sousa (2019, p.66) O objetivo desses enunciados era desenvolver uma teoria que possibilitasse a demonstração do Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros juntamente com a proposição equivalente. Os enunciados equivalentes, (E_1) e (E_2), são os mais conhecidos.

A equivalência entre o quinto postulado e o equivalente (E_1) de *playfair* está demonstrada em Sousa (2019, p. 66 - 68).

2.4 Alguns registros de tentativas de demonstração do quinto postulado

Inúmeros matemáticos se dedicaram à árdua tarefa de provar o quinto postulado de Euclides, um dos pilares da geometria euclidiana. No entanto, a maioria dessas tentativas esbarrou em um obstáculo comum: ou assumiam como verdade fatos que eram equivalentes ao próprio postulado, ou se baseavam em afirmações que não podiam ser deduzidas dos quatro postulados anteriores. Essa dificuldade em provar o

quinto postulado a partir dos demais lançou uma sombra sobre sua natureza e originou dúvidas sobre a sua necessidade como postulado, afinal, um postulado é uma afirmação dada como verdadeira aceita sem a necessidade de prova. O quinto postulado, por sua vez, parecia carecer dessa evidência intrínseca.

A persistência na busca por uma demonstração para o quinto postulado, mesmo diante de tantas falhas, revela a importância desse problema para a geometria e a matemática como um marco na história da matemática.

As geometrias não euclidianas, ao negarem o quinto postulado de Euclides, abriram um novo horizonte para a compreensão do espaço e da geometria. Eles demonstraram que a geometria euclidiana, embora seja uma descrição precisa do espaço em muitas situações cotidianas, isto é, em pequenas distâncias, não é a única possível. A história do quinto postulado e das tentativas de sua demonstração é um exemplo de como a matemática evolui e se transforma ao longo do tempo, impulsionada pela curiosidade, pela ousadia e pela busca por novas formas de compreender o mundo.

Neste momento do trabalho continuamos com o nosso propósito de reconstruir os fatos históricos que levaram ao surgimento das Geometrias Não Euclidianas, cujas descobertas influenciaram a história da matemática e da ciência. Vários foram os matemáticos que se lançaram na aventura de tentativa de demonstrar o Quinto Postulado. Os resultados obtidos, embora frustrantes, condicionaram as descobertas posteriores, dando grandes contribuições à teoria que viria a se firmar.

Estas contribuições notáveis podem ser encontradas em Arcari (2008), Heath (1925), Barbosa (2002), Mol (2013), Greenberg (1994), Rosenfeld (1988) e Bonola (1912) todos dispostos na bibliografia.

Abaixo estão mencionados alguns nomes que tentaram demonstrar o Quinto postulado. Sousa (2019, p.66 - 82) apresenta essas informações e algumas das demonstrações, como a de John Wallis.

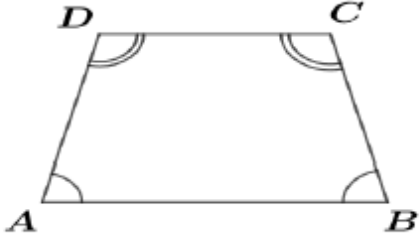
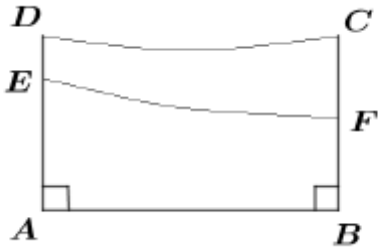
- Claudius Ptolomeu (85 d. C. – 165 d.C.)
- John Playfair (1748-1819)
- Proclus Diadoclus (410 d.C. – 485 d.C.)
- Thabit ibn Qurra (826 - 901)
- Abu Ali Al-Haitham (Alhazen) (965 - 1040)
- Omar Al-Khayyam (1048 - 1131)
- Nasir Al-Din Al-Tusi (Nasiredim) (1201 - 1274)

- John Wallis (1616 – 1703)
- Girolamo Saccheri (1667 - 1733)
- Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)
- Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

Vale mencionar que os árabes foram de fundamental importância na discussão das tentativas de prova do quinto postulado. Segundo Sousa (2019, p.73) deve-se a eles a introdução de quadriláteros que iriam ser fundamental nos estudos de Saccheri (1667-1733) para a descoberta de alguns resultados da geometria não euclidiana.

Ibn Qurra introduziu uma figura que será muito utilizada nas tentativas de demonstração do quinto postulado: trata-se de um quadrilátero de vértices $ABCD$, com dois lados iguais e opostos AD e BC e os ângulos da base $\hat{B}\hat{A}D$ e $\hat{A}\hat{B}C$ também são iguais (ver Figura 16 e Figura 17). Segundo essa hipótese, em um quadrilátero no qual os ângulos da base são ângulos retos, e considerando EF igual a AB , essa linha seria o deslocamento da base AB e consequentemente manteria o comprimento, o que implicaria o quarto ângulo $\hat{A}\hat{E}F$ ser também reto. (Sousa, 2019, p.73)

Através dessa hipótese Ibn Qurra estuda a demonstração do quinto postulado e passa a utilizar as figuras:

	
Figura 13: Quadrilátero de Ibn Qurra Fonte: Silva (2006)	Figura 14: Quadriláteros onde os ângulos da base $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ Fonte: Silva (2006)

Esses retângulos serão utilizados por outros pesquisadores como árabes Alhazen, Omar Al-Khayyam e Nasiredim.

2.5 - A contribuição de Giovanni Girolamo Saccheri

Giovanni Gerolamo Saccheri nasceu na cidade italiana de San Remo em 5 de setembro de 1667. Entrou para a ordem dos jesuítas em 1685 e foi ordenado padre em 1694. Lecionou filosofia na Universidade de Turim de 1694 a 1697, e de 1697 até sua morte em 25 de outubro de 1733 foi professor de teologia, filosofia e matemática na Universidade de Pádua. Sua obra mais conhecida é o livro *Euclides ab omni naevo*

vindicatus (Euclides Liberado de Todo Erro), publicado em 1733, ano de sua morte, em que tenta demonstrar que o quinto postulado de Os Elementos de Euclides seria verdadeiro, demonstra diversos resultados que são válidos na geometria hiperbólica. (1693), uma coleção de problemas de geometria e sua solução; um tratado de lógica, a Lógica Demonstrativa (1697), e Neo-statica, um tratamento geométrico de problemas de Estática e Dinâmica, publicado postumamente em 1708.

Segundo Sousa (2019, p.83) Saccheri considera outras hipóteses que não apareciam no trabalho desenvolvido por Euclides e pesquisou suas consequências. Saccheri acabou por fazer uma importante tentativa de provar o Quinto Postulado, que mais tarde, gerou outros rumos, e consequentemente outros resultados.

Em sua tentativa de demonstração, Saccheri analisou o quadrilátero isósceles com dois ângulos retos, assim como anteriormente feito por Omar Al-Khayyam e Nasiraddin.

Na tentativa de provar o quinto postulado Saccheri, em razão de professor de lógica, usou o método *Reductio Ad Absurdum*. Isto é:

[...] Saccheri supôs Falsa a afirmação do Quinto Postulado e desenvolveu seu estudo com a intenção de alcançar uma contradição. O enunciado do Quinto Postulado de Euclides é equivalente à seguinte afirmação: Há pelos menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . [...] (Sousa, 2019, p.84).

Segundo Sousa (2019, p84) Saccheri desenvolveu seu trabalho sobre o Quinto Postulado aceitando as vinte oito proposições iniciais do Livro I de Os Elementos, de Euclides, em razão das provas destas proposições não dependerem do Postulado. Isso, além de aceitar que os quatro primeiros postulados do Livro I de Os Elementos, de Euclides, serem válidos, e que Quinto Postulado seria falso.

Nestas condições, Saccheri analisa o quadrilátero $ABCD$, tomando os ângulos $\widehat{DAB}$ e $\widehat{ABC}$ como retos, os lados AD e BC iguais, os lados AB e CD denominados de *BASE* e *TOPO* respectivamente, e os ângulos $\widehat{ADC} = \alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$ denominados ângulos de topo. O Quadrilátero $ABCD$, assim formado, é chamado de quadrilátero de Saccheri. Segundo Sousa (2019, p. 84 - 85), seu trabalho consistia em três passos:

I. Provar que os ângulos $\widehat{ADC} = \alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$ são congruentes.

II. Provar que o Quinto Postulado equivale à hipótese do ângulo reto.

III. Provar que o fato de os ângulos $\widehat{ADC} = \alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$ serem obtusos ou agudos entra em contradição com uma das 28 primeiras proposições de *Os Elementos*, de Euclides.



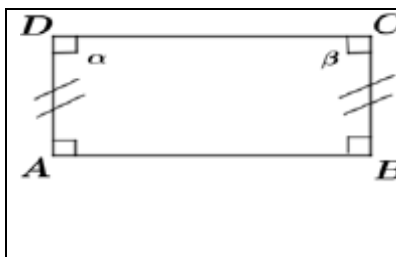
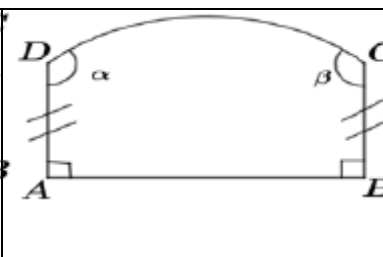
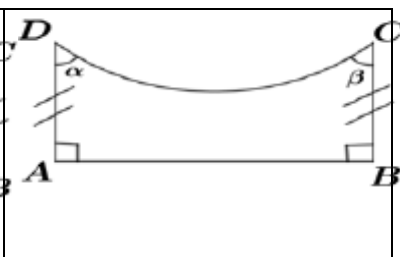
Figura 15: Quadrilátero de Saccheri
Fonte: Sousa (2019, p.85)

Nestas condições, Segundo Sousa (2019, p.85) Saccheri, tomando como base o Postulado 2 de *Os Elementos* de Euclides, faz as seguintes considerações:

- (i) A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° implicava que as linhas retas são finitas, o que contraria o Segundo Postulado de Euclides. Portanto, Saccheri encontrou uma contradição e logo desconsiderou essa hipótese.
- (ii) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° é equivalente ao Quinto Postulado.
- (iii) A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° . Neste caso Saccheri não conseguiu encontrar uma contradição direta. Em vez disso, ele derivou afirmações não intuitivas que permitiram concluir, segundo EVES (2005, p. 540), que "a hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa porque seria repugnante à natureza das linhas retas".

As três observações de Saccheri podem ser vistas com a seguinte organização:

- 1 – A Hipótese do Ângulo Reto - $\widehat{ADC} = \alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$ são Retos – HAR.
- 2 - A Hipótese do Ângulo Obtuso - $\widehat{ADC} = \alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$ são obtusos – HAO.
- 3 - A Hipótese do Ângulo Agudo – $\widehat{ADC} = \alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$ são Agudos – HAA.

		
Figura 16: Hipótese HAR Fonte: Sousa (2019, p.85)	Figura 17 : Hipótese HAO Fonte: Sousa (2019, p.85)	Figura 18 : Hipótese HAA Fonte: Sousa (2019, p.85)

Segundo Sousa(2019, p.86) Saccheri contribuiu com alguns resultados que anunciamos a seguir.

- Se em um quadrilátero $ABCD$ os lados AD e BC forem de medidas diferentes, então entre os dois ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$, será maior o que for adjacente ao menor lado e vice-versa.
- hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa porque seria repugnante à natureza das linhas retas".

CAPÍTULO 3: UMA GEOMETRIA INTUITIVA

Neste Capítulo expomos os primeiros resultados intuitivos da Geometria Hiperbólica e apresentamos algumas discussões que o apontam como um sistema geométrico não euclidiano rigoroso e equivalente ao sistema euclidiano. Apresentamos alguns modelos com o objetivo de viabilizar sua observação em um sistema de ensino.

3.1 – Uma geometria diferente

No início do século XIX, a busca pela demonstração do quinto postulado de Euclides, embora infrutífera, impulsionou a matemática de maneira inesperada. As tentativas fracassadas, em vez de significarem um fim, abriram caminho para a descoberta de novas geometrias, demonstrando a importância da persistência e da mudança de perspectiva no avanço científico. O trabalho árduo desses matemáticos, mesmo sem alcançar o objetivo inicial, lançou as bases para a construção de sistemas geométricos inovadores. Neste capítulo vamos citar os matemáticos que desenvolveram os resultados alcançados pela geometria hiperbólica.

3.1.1 – Carl Friedrich Gauss



Figura 19: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Fonte: <https://geniuses.club/genius/carl-friedrich-gauss>

Carl Friedrich Gauss, nasceu em Braunschweig na Alemanha, é considerado o príncipe da matemática, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, desempenhou um papel significativo no desenvolvimento da geometria não euclidiana, uma nova forma de entender e enxergar o espaço que desafiou

conceitos milenares. Sua genialidade e ousadia intelectual abriram caminho para uma revolução que transformaria a matemática e a física.

Gauss, um gênio à frente de seu tempo, foi um matemático prolífico e versátil, com contribuições significativas em diversas áreas da matemática, como teoria dos números, álgebra, análise matemática e geometria. Sua mente brilhante era capaz de vislumbrar novas perspectivas e desafiar ideias previamente estabelecidas.

No campo da geometria, Gauss foi pioneiro ao reconhecer a existência de uma geometria diferente da euclidiana, que por séculos fora a única forma de compreender o espaço que vivemos. Ele foi o primeiro a designar essa nova geometria como "não euclidiana", cunhando um termo que se tornaria fundamental para a matemática.

Apesar de suas descobertas revolucionárias, Gauss era extremamente cauteloso em relação à divulgação de suas ideias. Na época em que viveu, a inquisição, promovida pela igreja católica, exercia forte controle sobre o conhecimento e aqueles que desafiavam as ideias estabelecidas corriam o risco de serem perseguidos e punidos. Nestas condições, pelo medo, Gauss foi um homem cuidadoso.

Além disso, Gauss temia opor-se publicamente às teorias filosóficas de Immanuel Kant (1724 - 1804), um dos mais célebres filósofos modernos, cuja filosofia havia sido adotada pela Igreja Católica e era encarada como um dogma. Kant defendia que o espaço euclidiano era uma "necessidade inevitável de pensamento", ou mesmo perfeito, uma ideia que Gauss não compartilhava.



Figura 20: Immanuel Kant (1724 - 1804)

Fonte: <https://fasbam.edu.br/2023/08/25/o-espirito-da-era-moderna-e-a-era-pre-critica-de-immanuel-kant/>

Apesar de sua cautela, Gauss deixou para a posteridade um legado inestimável relativo ao conhecimento da existência da geometria não euclidiana: suas anotações e correspondências com outros matemáticos revelaram suas ideias revolucionárias sobre a geometria não euclidiana. Inicialmente, Gauss tentou provar o quinto postulado de Euclides. No entanto, suas investigações o levaram a questionar a validade desse postulado e a explorar novas possibilidades.

[...] Gauss ainda estava tentando provar o quinto postulado pelo método de redução a um absurdo. Este havia sido o processo tentado por Saccheri e Lambert no passado e cujas obras lhe eram familiar. Mas também está comprovado que ele conhecia, mais do que qualquer outro no passado, a profundidade do problema. Foi durante a segunda década daquele século que ele começou a desenvolver as ideias da nova Geometria, formulando seus teoremas. [...] (BARBOSA, 2002, p.44).

Na segunda década do século XIX, Gauss começou a desenvolver uma nova geometria, baseada em princípios diferentes dos da geometria euclidiana. Ele formulou ideias e teoremas que desafiavam a compreensão tradicional do espaço, abrindo caminho para uma nova forma de pensar a geometria. As descobertas de Gauss sobre a geometria não euclidiana, embora não divulgadas em sua época, foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática e da física nos séculos seguintes. Suas ideias inspiraram outros matemáticos a explorar novas geometrias e a questionar os conceitos tradicionais sobre o espaço.

[...]A hipótese que a soma dos ângulos é menor que 180° leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. [...] Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contêm nada de impossível.[...] Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós).[...] (Barbosa 2002, p. 45).

Nestas condições, a geometria não euclidiana, quebrou paradigmas e abriu caminho para a teoria da relatividade de Albert Einstein, que revolucionou a física e nossa compreensão do universo. A genialidade de Gauss, sua ousadia intelectual e sua cautela em face da tirania promovida da Igreja Católica o consagraram como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Seu legado transcende a matemática e influencia nossa compreensão do espaço e do universo.

3.1.2 Farkas Bolyai



Figura 21: Farkas Bolyai (1775 - 1856)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Farkas_Bolyai

O matemático húngaro Wolfgang Bolyai (1775 - 1856), que vamos identificar no texto como Farkas Bolyai, Foi amigo de infância de Gauss, tendo compartilhado com o renomado matemático alemão a paixão pela busca da demonstração do quinto postulado de Euclides, também conhecido como o postulado das paralelas.

A amizade entre Farkas e Gauss foi marcada por uma intensa troca de correspondências, nas quais os dois matemáticos discutiam ideias e teorias sobre o quinto postulado. Ambos acreditavam que o postulado, por sua natureza complexa e controversa, poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro postulados de Euclides, que são mais simples e de caráter intuitivos.

Em 1804, Farkas acreditava ter encontrado a solução para o enigma do quinto postulado. Ele então apresentou seu trabalho a Gauss, certo de que havia finalmente desvendado o mistério que intrigava os matemáticos há séculos. No entanto, após analisar cuidadosamente a demonstração do amigo, Gauss apontou um erro crucial que invalidava a prova. Nestas condições, Farkas desolado voltou aos estudos, sempre na busca de resolver o enigmático postulado e quatro anos depois, em 1808, Farkas retornou a Gauss com uma nova demonstração, buscando corrigir a falha apontada anteriormente. Apesar de estar convicto que sua segunda tentativa estava correta, Gauss resolveu não responder ou fazer qualquer comentário sobre o trabalho de Farkas.

Segundo Boyer (2001), diante da falta de reconhecimento por parte de Gauss, Farkas Bolyai decidiu registrar suas ideias e descobertas no livro *Tentamen juventutem in elementa matheseos purae, elemmentaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, publicado em dois volumes. A obra, que aborda diversos temas matemáticos, incluindo a teoria das paralelas, tornou-se um importante documento histórico sobre a busca pela demonstração do quinto postulado.

Pode-se afirmar que embora Farkas Bolyai não tenha conseguido provar o quinto postulado, sua busca incansável e suas contribuições para a teoria das paralelas foram valiosas para o desenvolvimento da geometria não euclidiana. Seus trabalhos, juntamente com os de outros matemáticos que se dedicaram ao estudo do quinto postulado, abriram caminho para a criação de novas geometrias que desafiaram a visão tradicional do espaço e revolucionaram a matemática.

3.1.3 – Janos Bolyai (1802 - 1860)



Figura 22: Janos Bolyai (1802 - 1860)

Fonte: <https://banaticum.ro/en/bolyai-janos-1802-1860-3/>

Janos Bolyai, filho de Farkas Bolyai, nasceu em Kolgsvár Hungria, desde jovem era considerado uma promessa relativa ao estudo da matemática e como já era esperado, depois de formado e devido à fama do quinto postulado se interessou pelo mistério e se enveredou na luta da tentativa de demonstração trazendo junto Carlo Zsász (1798 - 1856) seu amigo desde a Escola Real de Engenharia. Da junção desses dois surgiram ideias que segundo (BONOLA, 1955, p. 97) conduziram a Janos a ter as primeiras ideias com relação ao paralelismo e a escrever *A Ciência do Espaço Absoluto* que segundo Barbosa (2002, p.48) tratava a Geometria Euclidiana como caso particular.

Quando seu pai soube do interesse de Janos pela resolução do enigma lhe escreve uma carta pedindo que se afastasse do mistério.

[...] não debes tentar abordar o problema das paralelas. Conheço esse caminho até ao fim. Atravessei essa noite sem fim, que extinguiu toda a luz e alegria na minha vida. Peço-te encarecidamente que abandones a ciência das paralelas... Pensei que me sacrificaria em nome da verdade. Estava pronto para me tornar um mártir que removeria o erro da geometria e a restituiria sem mácula à humanidade. Empreendi trabalhos enormes e monstruosos; as minhas descobertas são muito melhores que as dos outros e mesmo assim não atingi a satisfação completa. [...] Voltei para trás quando compreendi que nenhum homem podia chegar ao fim dessa noite. Regressei inconsolável, chorando por mim e por toda a humanidade. (VELOSO, 1998, p.349).

Janos, não se sensibiliza com o pedido do pai, ao contrário disso construiu uma nova geometria, não tentando provar o Quinto Postulado, mas negando sua validade. Nestas condições, em 1823, em uma carta anunciou suas descobertas. Eis aqui um trecho de uma carta de Janos para Farkas:

Estou decidido a publicar um trabalho sobre as paralelas assim que possa organizar, completá-lo e que tenha oportunidade para isso. Ainda não cheguei à descoberta pretendida, mas o caminho que segui é quase certo que me conduzirá ao meu objetivo, desde que ele seja possível. Ainda não o atingi, mas descobri coisas tão fantásticas que fiquei profundamente admirado. Seria uma eterna desgraça se estas coisas se perdessem, como tu, querido pai, serás forçado a admitir quando as vires. Tudo o que posso dizer agora é que criei um mundo novo e diferente a partir do nada. Tudo o que te enviei até agora é como um castelo de cartas comparado com uma verdadeira torre (VELOSO, 1998, p.350).

Segundo Veloso (1998, p.350), o trabalho de Janos Bolyai, de 29 anos na época, cujo o título é *A Ciência do Espaço Absoluto*, de título original: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geométrica*, foi publicado como apêndice de um livro de geometria em dois volumes de seu pai, Farkas Bolyai, em 1831. Segundo Boyer (1974, p.397), o título do livro de Farkas original: *Tentamen juventutem in elementa matheseos purae, elemmentaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, já mencionado no texto.

Segundo Sousa (2019, p. 96) Janos inova com uma nova definição de retas paralelas, vejamos:

[...] Janos nos abastece de uma nova definição de retas paralelas, que depende do “ângulo de paralelismo”. De acordo com Bolyai (1832, p.5), “se o raio AM não é cortado pelo raio BN, situado no mesmo plano, mas é cortado por

qualquer outro raio BP compreendido no ângulo $\widehat{ABN}$, diremos que o raio BN é paralelo ao raio AM; cuja notação é dada por $BN \parallel AM$ ". Claramente vemos, na Figura 48, que a definição de paralelas dada por Janos Bolyai não implica equidistância entre os raios paralelos e, nestas condições, podemos imaginar o BN como sendo assintótico a AM, sem deixar de ser paralelo. (Sousa, p.96)

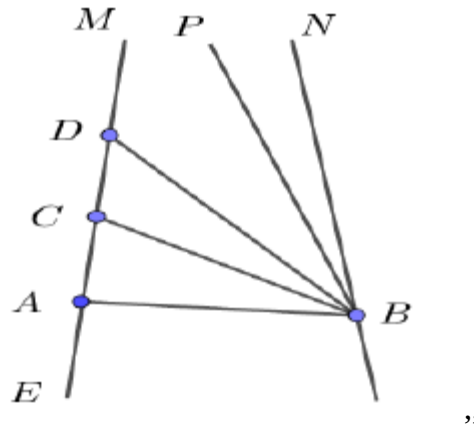


Figura 23: O raio BN paralelo ao raio AM – Geometria de Bolyai

Fonte: Adaptado de BOLYAI (1832).

Bolyai construiu uma série de teoremas para a geometria não euclidiana, utilizando suas definições de paralelas e sem depender do quinto postulado de Euclides, criando assim um sistema independente da geometria tradicional. Segundo Sousa (2019, p.101) os resultados de grande importância relativos ao trabalho de Janos Bolyai, o qual mencionou abaixo:

- a) Definição de paralelas e suas propriedades, independentes do Quinto Postulado.
- b) Círculo e esfera de raio infinito e suas propriedades independentes do postulado euclidiano.
- c) A trigonometria esférica é independente do postulado de Euclides. (demonstração direta de fórmulas).
- d) A trigonometria plana no caso não euclidiano. Aplicações relativas ao cálculo de áreas e volumes.
- e) Problemas que podem ser resolvidos elementarmente. Construção de um quadrado equivalente a um círculo, na hipótese da falsidade do Quinto Postulado.

Segundo Bolyai (1832, p. 21). “Em qualquer triângulo esférico, os senos dos lados são como os senos dos ângulos opostos”. Ou seja, essa afirmação sobre a relação entre os lados e ângulos de triângulos esféricos é uma generalização da lei dos senos, válida tanto na geometria euclidiana quanto na geometria não euclidiana.

Alguns dos resultados mais importantes encontrados por Bolyai na construção de **A Ciência do Espaço Absoluto** foram a definição de paralelas e de suas propriedades independentemente do quinto postulado de Euclides, e a dedução de uma Geometria Independente do Quinto Postulado, onde ele contribui com a elaboração de um parâmetro identificado por i , denominado por ele de unidade absoluta de comprimento; quando i tende a infinito, sua geometria se aproxima da Geometria de Euclides [...] (SILVA, 2006, p.16).

Bolyai observando a hipótese do ângulo agudo (HAA), inaugura um estudo que se inicia das formulas da trigonometria plana para então construir uma outra versão de trigonométrica que depende de um parâmetro que correspondia a uma geometria imaginária.

Vale lembrar que uma cópia de seu trabalho foi enviada a Gauss por Farkas, que responde:

Se eu começar por dizer que sou incapaz de elogiar este trabalho, certamente se surpreenderá por um momento. Mas não posso dizer outra coisa. Elogiá-lo, seria elogiar-me a mim próprio. Sem dúvida o conteúdo da obra, o caminho seguido pelo seu filho, os resultados a que foi conduzido coincidem quase completamente com as minhas reflexões, que ocuparam em parte o meu espírito durante os últimos trinta ou trinta cinco anos. Por isso fiquei completamente estupefato. No que diz respeito ao meu trabalho, do qual pouco até agora escrevi, a minha intenção era não publicar durante a minha vida. A maioria das pessoas não tem certamente ideias claras sobre as questões de que estamos falando, e tenho encontrado poucas pessoas que olhassem com especial interesse o que lhes comuniquei sobre este assunto. Para ser capaz de ter esse interesse é necessário em primeiro lugar ter pensado cuidadosamente sobre a natureza do que se pretende e sobre esta matéria quase todos estão inseguros. Por outro lado era minha ideia escrever tudo isto mais tarde de modo a que pelo menos não morresse comigo. Por isso é uma agradável surpresa para mim ter sido libertado dessa preocupação, e estou muito contente que seja o filho do meu velho amigo que toma precedência sobre mim de modo tão notável (VELOSO, 1998, p.350).

Janos ao saber desta carta ficou desolado, chegando a pensar que o fato não passava de uma tentativa do velho professor de ficar com sua produção.

3.1.4 – Nicolai Ivanovich Lobachewsky



Figura 24: Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856)

Fonte: <https://www.facebook.com/Lobachevsky.Math/>

Nikolai Lobachevsky, filho de um funcionário público e ficou órfão ainda criança, foi um matemático russo de destaque cujo conhecimento desafiou os paradigmas da geometria euclidiana e com isso abriu caminho para novas formas de compreender o espaço. Sua trajetória acadêmica e suas ideias revolucionárias o consagraram como um dos pais da geometria não euclidiana, mais precisamente da geometria hiperbólica.

Lobachevsky formou-se na Universidade de Kazan em 1813 e logo se tornou instrutor na mesma instituição. Aos 21 anos, já integrava o corpo docente da universidade, demonstrando seu incrível talento e sua paixão pela matemática. Sua ascensão foi rápida, e aos 35 anos ele foi nomeado reitor, cargo que exerceu com grande competência e liderança.

Lobachevsky era filho de um modesto funcionário público e ficou órfão aos sete anos de idade. Com todas as dificuldades da família, ele foi enviado para estudar na Universidade de Kazan, Rússia, onde se formou em 1813 e teve contato com professores da Alemanha, entre estes, J.M. Bartels (1769-1836), que havia sido professor de Gauss. Aos vinte e um anos de idade, Lobachevsky já era membro da faculdade, primeiro como assistente e depois como professor, e em 1827 foi nomeado Reitor da Universidade de Kazan, aos trinta e quatro anos de idade. Entre seus estudos, dedicou-se também à demonstração do Quinto Postulado. Segundo Veloso (1998, p.351), em 1823 já via a possibilidade da existência de uma geometria imaginária. Em 1826 apresentou seu trabalho em uma palestra na Universidade de Kazan. (Sousa, 2019, p.98)

Lobachevsky é conhecido por suas contribuições para a geometria não euclidiana, em particular, para a geometria hiperbólica. Ele questionou o quinto

postulado de Euclides, que afirmava que por um ponto exterior a uma reta passa apenas uma paralela a essa reta. Lobachevsky ousou negar esse postulado, propondo que por um ponto exterior a uma reta passam pelo menos duas paralelas a essa reta, ou seja, uma infinidade.

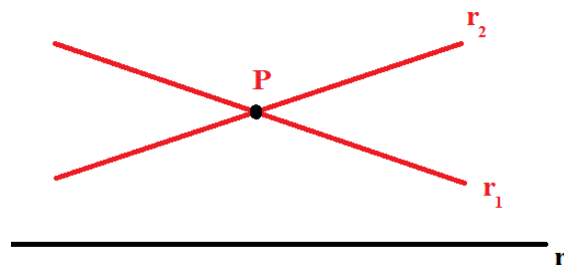


Figura 25: Retas paralelas hiperbólicas

Fonte: Desenho nosso

Essa ideia revolucionária, que ia contra a intuição e o conhecimento matemático da época, foi apresentada por Lobachevsky em uma conferência no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kazan, em 1826. Ele argumentou que a geometria euclidiana era apenas um caso particular de uma geometria mais geral, e que a geometria hiperbólica, baseada em sua negação do quinto postulado, era igualmente válida e consistente.

As ideias de Lobachevsky foram inicialmente recebidas com ceticismo e resistência pela comunidade matemática. Seu artigo submetido à Academia de Ciências de São Petersburgo foi rejeitado, e suas ideias foram consideradas absurdas e sem fundamento. No entanto, com o tempo e o desenvolvimento de novas ferramentas matemáticas, a importância e a validade da geometria hiperbólica foram reconhecidas.

Lobachevsky, apesar do reconhecimento tardio, é hoje considerado um dos maiores matemáticos russos de todos os tempos. Sua coragem em desafiar os status quo e sua genialidade em construir uma nova geometria a partir da negação de um postulado milenar, abriram caminho para uma revolução na matemática e na física.

A geometria hiperbólica de Lobachevsky, juntamente com outras geometrias não euclidianas, como a geometria elíptica, transformou a nossa compreensão do espaço e influenciou o desenvolvimento de teorias como a Teoria da Relatividade de Einstein.

A criação da geometria não euclidiana é uma revolução no campo da matemática, feito notável que pode ser comparado ao que fez Nicolau Copérnico (1473 - 1543). Isto é, do nada foi criado um universo desenvolvido Lobachevsky, Gauss e Bolyai que revolucionaram a noção de espaço. Curiosamente, os três matemáticos desenvolveram suas ideias de forma independente e quase simultânea, cada um contribuindo com sua visão e intuição para a construção dessa nova geometria.

Dentre os três, Lobachevsky foi o primeiro a divulgar suas descobertas, em 1826. Sua ousadia em desafiar o quinto postulado de Euclides, uma noção dogmática e milenar da geometria, demonstra sua coragem intelectual e sua crença na validade de suas ideias. Lobachevsky não se intimidou com o impacto que seu trabalho poderia causar na teoria filosófica de Kant, que defendia a geometria euclidiana como a única forma possível de compreender o espaço.

Apesar de sua ousadia e de suas contribuições inovadoras, Lobachevsky não recebeu o reconhecimento que merecia durante sua vida. Suas ideias foram inicialmente recebidas com ceticismo e resistência pela comunidade matemática, que ainda não estava preparada para abandonar a visão tradicional da geometria euclidiana. O reconhecimento do trabalho de Lobachevsky veio apenas após sua morte, quando a importância de suas descobertas para o desenvolvimento da matemática se tornou evidente.

Em 1871, o matemático alemão Felix Klein desempenhou um papel fundamental na divulgação e na consolidação da geometria não euclidiana. Ele nomeou a nova geometria desenvolvida por Lobachevsky, Gauss e Bolyai como Geometria Hiperbólica, uma denominação que se mantém até os dias de hoje.

A geometria hiperbólica, baseada na negação do quinto postulado de Euclides, oferece uma nova forma de compreender o espaço, diferente daquela proposta pela geometria euclidiana. Nessa nova geometria, por um ponto exterior a uma reta passam infinitas paralelas a essa reta, o que leva a resultados e propriedades geométricas surpreendentes e inovadoras.

Nestas condições, a descoberta da geometria não euclidiana por Lobachevsky, Gauss e Bolyai representa um marco extraordinário na história da matemática e da

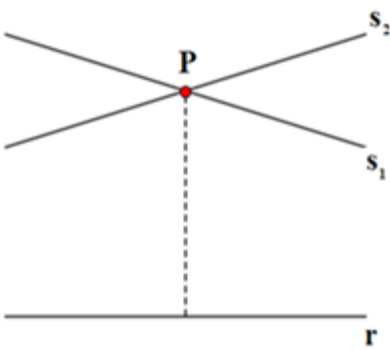
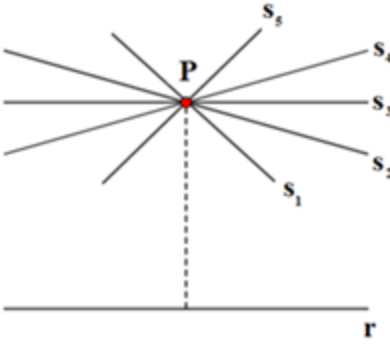
ciência. Ela desafiou dogmas milenares, abriu caminho para novas formas de pensar o espaço e influenciou o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, como a física e a cosmologia.

CAPÍTULO 4: UMA CONSISTENTE GEOMETRIA

Neste capítulo apresento os primeiros passos da Geometria Hiperbólica como um sistema geométrico que desafia a nossa intuição sobre o espaço. Como exemplo demonstro dois resultados intuitivos que nos mostram a diferença e a dificuldade de se entender a base teórica este conhecimento. Ao contrário da geometria euclidiana, onde as linhas paralelas nunca se encontram, na geometria hiperbólica, elas podem divergir infinitamente..

4.1 – A Geometria Hiperbólica

A geometria hiperbólica é a geometria que surgiu na história da humanidade após a negação do quinto postulado de Euclides, ou trocando o postulado das paralelas pelo seguinte: *por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas paralelas a reta dada*. Nestas condições, fica claro que no espaço hiperbólico não existe apenas uma ou duas, mas uma infinidade de retas paralelas passando por um ponto P externo dado fora de uma reta r . Na figura 26, vê-se claramente, as retas s_1 e s_2 são paralelas a reta r e na figura 27 s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5 são todas paralelas a reta r .

	
Figura 26: $P \notin r - s_1$ e s_2 são paralelas a r. Fonte: Elaboração do Autor	Figura 27: $P \notin r - s_1, s_2, s_3, s_4$ e s_5 são paralelas a r. Fonte: Elaboração do Autor

Com a ousada suposição da geometria hiperbólica, que postula a existência de múltiplas paralelas a uma reta dada por um ponto externo, e utilizando proposições da geometria euclidiana independentes do quinto postulado, Lobachevsky construiu uma nova geometria com teoremas próprios e distintos da geometria tradicional.

Uma das consequências dessa nova geometria, conforme apontado por Gauss em sua correspondência com Franz Adolph Taurinos (1794 - 1874), é que a soma dos ângulos internos de um triângulo, nessa nova geometria, é sempre inferior a 180° , um resultado que desafia a geometria euclidiana e que vamos mostrar.

Outra consequência notável é a inexistência de triângulos semelhantes na geometria hiperbólica. Enquanto na geometria euclidiana, triângulos com ângulos iguais são semelhantes, na geometria hiperbólica, a igualdade dos ângulos implica na congruência dos triângulos, ou seja, na sua igualdade em forma e tamanho.

Essa distinção fundamental entre as geometrias euclidiana e hiperbólica reside no fato de que, na geometria hiperbólica, a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo e 180° , identificada como defeito angular, varia de acordo com o tamanho do triângulo. Quanto maior o triângulo, maior o defeito angular; quanto menor o triângulo, mais a soma de seus ângulos se aproximam de 180° , aproximando-se da geometria euclidiana.

Nestas condições, a geometria hiperbólica revela uma relação intrínseca entre os ângulos e as dimensões dos triângulos, uma característica que a distingue da geometria euclidiana e a torna uma ferramenta poderosa para explorar e compreender o espaço de maneiras novas e surpreendentes.

4.2 Alguns resultados

4.2.1 Afirmação 1

Em Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

Prova:

A demonstração desta proposição é baseada em Sousa (2019, p.106-107), devido à sua organização e preocupação com a transposição didática. Nestas condições serei fidedigno às notações originais. Vejamos:

Seja L_1 uma reta e P um ponto fora de L_1 , $P \notin L_1$, de modo que, pelo axioma hiperbólico, pelo menos duas retas passem pelo ponto P e são paralelas à reta L_1 . (Ver Figura 28).



Figura 28: Apoio 1 para a demonstração – Afirmação 1
Fonte: Sousa (2019, p.106)

Construindo, de maneira usual, uma paralela L_2 a L_1 passando pelo ponto P e baixando uma perpendicular $\overrightarrow{PQ}$ a L_1 , $Q \in L_1$, tomando L_2 perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ a L_2 em P . (Ver Figura 29)

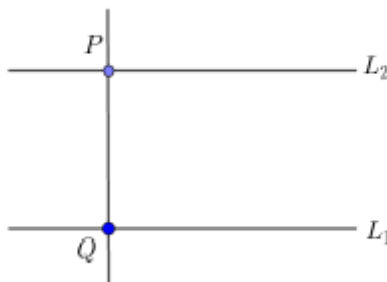


Figura 29 : Apoio 2 para a demonstração – Afirmação 1
Fonte: Sousa (2019, p.106)

Seja L_3 outra paralela a L_1 em P . $\overrightarrow{PX}$ é uma semirreta de L_3 e $\overrightarrow{PY}$ é uma semirreta de L_2 . Nestas condições, podemos observar que qualquer ponto de L_3 é ponto interior ao ângulo $\overrightarrow{PQ}\hat{P}L_2$.. Pelo axioma de Arquimedes existe um ponto R sobre L_1 , $R \in L_1$, no mesmo semi-plano relativo à $\overrightarrow{PX}$, X e Y , tal que $a < b$ (*), onde a é o ângulo $P\hat{R}Q$ e b é o ângulo $X\hat{P}Y$. Mas, ao mesmo tempo, $\overrightarrow{PR}$ está no interior do ângulo $c = Q\hat{P}X$, pois $\overrightarrow{PX}$ está no interior do ângulo $d = Q\hat{P}R$ e encontraria $\overrightarrow{QR}$, o que

contraria a hipótese de L_3 ser paralela à L_1 , e, portanto, não encontra L_1 . (Ver Figura 30).

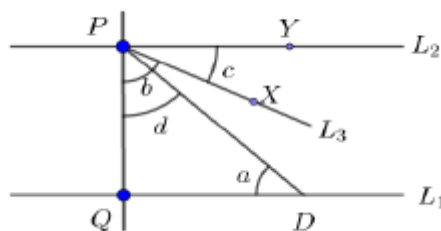


Figura 30: Apoio 3 para a demonstração – Afirmação 1

Fonte: Sousa (2019, p.107)

Se $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AD}$ corta o segmento $\overline{BC}$ (um resultado da geometria absoluta). (Ver Figura 31).

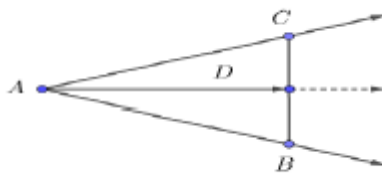


Figura 31: Apoio 4 para a demonstração – Afirmação 1

Fonte: Sousa (2019, p.107)

Então, se $\overline{PR}$ está no interior do ângulo c , temos então que $d < c$ (**)

Fazendo (*) + (**) temos

$$\begin{array}{rcl}
 a < b & & \\
 d < c & + & \\
 \hline
 a + d < b + c = 90^\circ & \Rightarrow & a + d < 90^\circ
 \end{array}$$

Ou seja, a soma dos ângulos internos de triângulo hiperbólico é menor que 180° . O que conclui a prova.

4.2.2 Afirmação 2

Em Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é menor que 360° .

Prova:

A demonstração desta proposição é baseada em Sousa (2019, p.108), devido à sua forma de organização e preocupação com a organização didática. Nestas condições serei fidedigno às notações originais. Vejamos:

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e o segmento $\overline{AC}$ uma diagonal dividindo $ABCD$ em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$. Os ângulos internos relativos aos vértices A e C de $ABCD$ são divididos em duas partes que são $A=x+y$ e $C=z+t$. (Ver Figura 32).

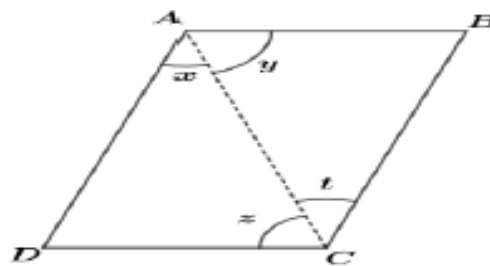


Figura 32: Quadrilátero hiperbólico
Fonte: Sousa (2019, p.108)

Nestas condições, temos:

- $\widehat{CAD} = x$
- $\widehat{BAC} = y$
- $\widehat{ACD} = z$
- $\widehat{ACB} = t$

Pelo teorema anterior, observando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, temos que:

$$\triangle ABC: \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = y + t + \widehat{ABC} < 180^\circ$$

$$\triangle ACD: \widehat{CAD} + \widehat{ACD} + \widehat{ADC} = x + z + \widehat{ADC} < 180^\circ$$

+

$$\underbrace{x + y}_{\widehat{BAD}} + \underbrace{z + t}_{\widehat{BCD}} + \widehat{ABC} + \widehat{ADC} < 360^\circ$$

Ou seja:

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{ADC} < 360^\circ$$

O que conclui a prova.

4.3 Consistência e Modelos da Geometria Hiperbólica

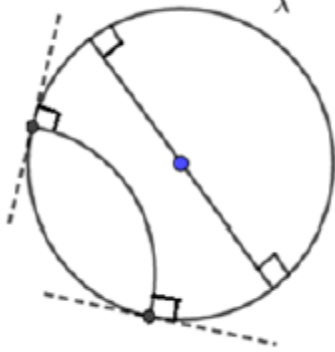
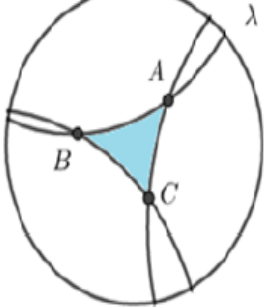
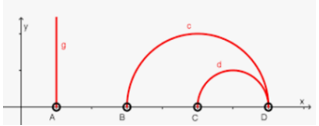
4.3.1 Consistência

Segundo Sousa (2019, p.116-117) “A Geometria Hiperbólica é um sistema geométrico completo que apresenta grande complexidade, e é tão válido quanto o sistema euclidiano.”

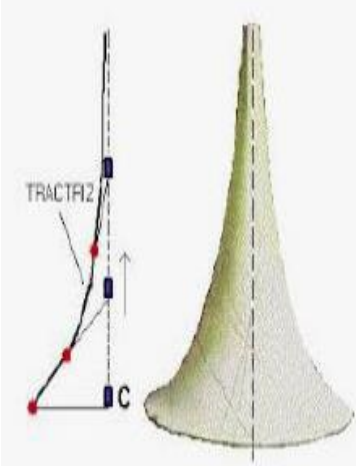
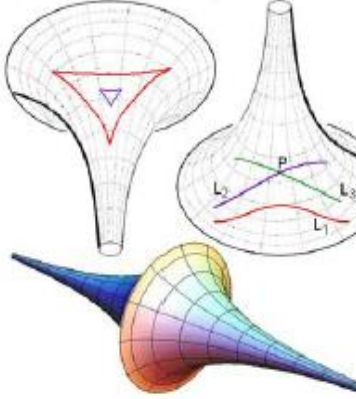
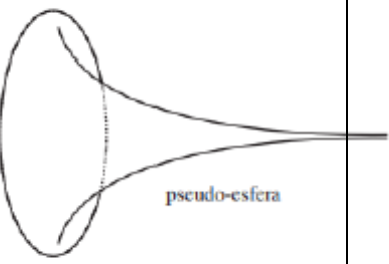
Nestas condições, temos que a Consistência da Geometria Hiperbólica é um tema fundamental dentro da lógica matemática e da teoria dos fundamentos da matemática. Ele se refere à questão de saber se a geometria hiperbólica é consistente, isto é, se não leva a contradições dentro de um sistema axiomático.

[...] seria a Geometria Hiperbólica consistente? Nesse contexto, para encontrar uma contradição, bastaria provar toda a contradição de um sistema, ou seja, demonstrar sua não contradição é uma operação muito mais complicada. [...] Uma saída possível seria a transformação de um modelo de Geometria Não Euclidiana em um modelo de Geometria Euclidiana. Ou seja, encontrar uma correspondência entre as duas geometrias para as quais cada ente hiperbólico corresponde a um ente euclidiano, isto é, para cada postulado da Geometria Hiperbólica corresponde um verdadeiro postulado da Geometria Euclidiana, e os teoremas da Geometria Hiperbólica correspondem a teoremas da Geometria Euclidiana e assim validando a Geometria Hiperbólica. [...] a criação de um modelo permitiria, em primeiro lugar, que a Geometria Hiperbólica fosse enxergada ou representada em um plano euclidiano, como também no espaço. [...] relacionar as duas geometrias, demonstrando assim que, se a Geometria Hiperbólica é contraditória a Geometria Euclidiana também o seria. (Sousa, 2019, p.116-117)

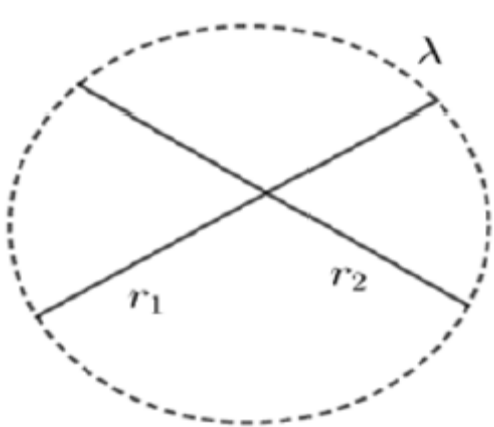
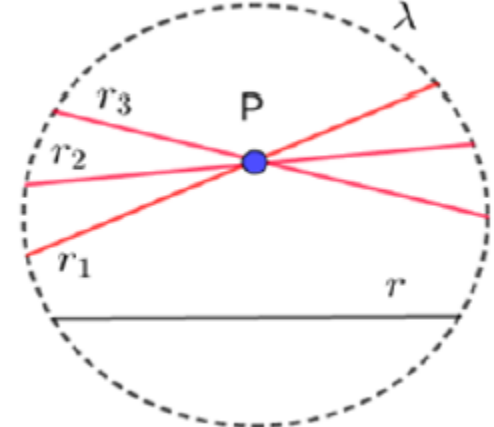
Historicamente, essa questão foi resolvida por meio da interpretação modelo-teórica da geometria hiperbólica dentro da geometria euclidiana, ou seja, por meio do modelo do disco de Poincaré, por exemplo. Por sua vez, o trabalho de Beltrami (1868) mostrou que se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica também o será, pois pode ser modelada dentro da euclidiana.

		
Figura33: Plano de Poincaré (i) Fonte: Elaboração do autor	Figura34: Plano de Poincaré (i) Fonte: Elaboração do autor	Figura 35: semi-plano de Poincaré Fonte: núcleodoconhecimento.com.br

Nestas condições, Um modelo de uma geometria é um ambiente matemático no qual seus conceitos, postulados e teoremas são interpretados e suas afirmações são aceitas como verdadeiras. Sendo assim, os modelos fornecem uma representação concreta da geometria, permitindo que os matemáticos visualizem e explorem suas propriedades de forma mais intuitiva.

		
Figura36: Modelo de Beltrami Fonte: SEARADACIENCIA, 2019, p.1	Figura37: Modelo de Beltrami Fonte: Geometria Hiperbólica (2016, p.1).	Figura 38: Pseudoesfera Fonte: Arcari (2008, p.45).

No caso da geometria hiperbólica, diversos modelos foram desenvolvidos ao longo do tempo, como o modelo do disco de Poincaré, o modelo do semi-plano de Poincaré e o modelo de Klein. Cada um desses modelos oferece uma perspectiva diferente da geometria hiperbólica, revelando suas características e propriedades de maneiras únicas.

	
Figura39: O Plano de Klein – As retas r_1 e r_2 no Plano de Klein Fonte: Sousa, 2019, p 119.	Figura 40: r_1, r_2 e r_3 são retas paralelas à reta r passando pelo ponto P no Plano de Klein Fonte: Sousa, 2019, p 119..

Através desses modelos, foi possível demonstrar que a geometria hiperbólica é consistente, ou seja, que não há contradições lógicas em seu sistema de axiomas e teoremas. Essa demonstração foi um marco na história da matemática, pois mostrou que a geometria euclidiana não é a única forma possível de descrever o espaço, e que existem outras geometrias, igualmente válidas e consistentes, que podem ser utilizadas para modelar o universo de maneiras diferentes e inovadoras.

CONCLUSÃO

A Geometria Hiperbólica, com sua natureza não euclidiana, apresenta um desafio e uma oportunidade para a educação matemática. A complexidade de seus conceitos pode ser superada por meio de abordagens pedagógicas inovadoras, que despertam o interesse e a compreensão de alunos e professores.

A história da matemática, com seus personagens e reviravoltas, serve como um ponto de partida fascinante. A jornada de Euclides ao questionamento do quinto postulado, passando pelas tentativas frustradas de demonstração e culminando na descoberta da geometria hiperbólica, revela a natureza dinâmica e criativa da matemática.

A visualização desempenha um papel fundamental na compreensão da geometria hiperbólica. Modelos como o disco de Poincaré e o semiplano de Poincaré permitem que os alunos explorem as propriedades únicas desse espaço, como a curvatura negativa e a divergência das retas paralelas.

Embora não desenvolvida neste trabalho, atividades práticas, como construções geométricas em softwares de geometria dinâmica, jogos e quebra-cabeças, podem tornar o aprendizado mais interativo e envolvente. Pode-se também buscar a conexão com a arte e com a natureza, através das obras de M.C. Escher e das estruturas encontradas no mundo natural, que nos mostra a relevância da geometria hiperbólica além dos livros didáticos.

A reflexão sobre as implicações filosóficas da geometria hiperbólica, como a ideia de que a geometria euclidiana não é a única descrição possível do espaço, amplia a visão dos alunos sobre a matemática e o mundo.

Ao adotar essas abordagens, os professores podem transformar a introdução da geometria hiperbólica em uma experiência enriquecedora, que estimula a curiosidade, o pensamento crítico e a apreciação da beleza e da complexidade da matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, B. P. **As Funções Trigonométricas Hiperbólicas Complexas no Contexto da Iniciação Científica do Ensino Médio**. 2016. 96 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Boa Vista, Roraima, 2016.

ARCARI, I. **Um texto de Geometria Hiperbólica**, 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP, 2008. Disponível em: <www.bibliotecadigital.unicamp.br>. Acesso em: 20 ago. 2018.

BARBOSA, J. I. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. (Coleção do Professor de Matemática, v. 8).

BARBOSA, João Lucas. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1995.

BARBOSA, Paula Marcia. **O Estudo de Geometria**. Disponível em: 200.156.28.7/Nucleus/.../Nossos_Meios_RBC_RevAgo2003_Artigo_3.rt.. Acesso em: 28. agosto de 2014.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOLYAI, Janos. The science of absolute space. *In*: BONOLA, Roberto. **NonEuclidean geometry: a critical and historical study of its development**. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955. p. 1-71.

BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development**. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

BOYER, Carl B. História da Matemática. 3.ed. Blucher. São Paulo, 2010.

BARBOSA. L. N. S. C. **Uma Reconstrução Histórico-Filosófica do Surgimento das Geometrias Não Euclidianas**. 2011. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática, Londrina, Paraná, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponível em: www.pcn.gov.br. Acesso em: 05 jan. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático 2005**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/pnld/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207>. Acesso em: 05 jan. 2015.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. BRASIL. Senado Federal. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: nº 5.692/71. Brasília, 1971.

BRAZ, F. M. **História da Geometria Hiperbólica**, 2009. Monografia (Especialização em matemática para professores) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG, 2009. Disponível em: www.bibliotecadigital.unicamp.br. Acesso em: 28.ago.2018.

BRITO, A. de J., MORAES, L. (2009). A obra de Gerolamo Saccheri e a história da geometria não-euclidiana; p.105-114. *Zetetike*, 6(2). <https://doi.org/10.20396/zet.v6i10.8646786>.

CABARITI, E. Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2004.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) - Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2011.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. – **Formação de professores de matemática para o século XXI: O grande desafio**. Pró-Posições, Campinas, n. 1 (10) p. 35-40, mar.1993.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. 2. ed. São Paulo: Francisco Alves, 1995.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**; tradução: Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp. Campinas, 2004.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 4ª.ed. Revisada. São Paulo: Livraria, 2009.

GRAY, Jeremy. **The discovery of non-Euclidean geometry**. IN: PHILIPS, Esther R. (ed.). *Studies in the History of Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America, 1987, p. 37-60.

GREEBERG, Marvin Jay. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. Fourth Edition. W. H. Freeman and Company, 2007.

HEATH, Sir Thomas L. **Euclid: Os treze livros de Elementos**. Dover Publications, Inc.: New York, 1956.

HEFEZ, A. **Indução matemática**: Programa de iniciação científica OBMEP. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 83 p.

HOLME, Audun. **Geometry: Our Cultural Heritage**. 2. ed. Berlim: Springer, 2012.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**: complexos, polinômios e equações. 7ª. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. v. 6, 250 p.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. Boletim Gepem, nº 44, Rio de Janeiro, 2004.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KALEFF, A.M; FRANCA, J. C. A História, as Geometrias Não-Euclidianas e os Livros Didáticos do Ensino Médio: uma análise da apresentação de retas paralelas In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 4, 2008. Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro, 2008.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides** : a historia da geometria : das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo : Geração Editorial, 2010.

MOL, Rogerio Santos. **Introdução à historia da matemática**. Belo Horizonte-MG, CAED-UFG, 2013. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf.

PINASCO, Juan Pablo; AMSTER, Pablo; SAINTIER, Nicolás; LAPLAGNE, Santiago; SALTIVA, Inés. **Las Geometrías**. Buenos Aires: Eudeba, 2023.

ROSENFELD, BA. **A História da geometria Não-Euclidiana**: Evolução do conceito de um espaço geométrico. Springer-Verlag: New York, 1988.

SARTON, George. **Helenístico Ciência e Cultura nos últimos três séculos aC**. Dover Publications, Inc.: New York, 1959.

SOUSA, Alexandre Pereira. **A geometria não euclidiana e formação do professor de matemática**. 2019. 258 f. : il. color. ; 30 cm. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, 2019.

SOUSA, Alexandre Pereira. **Isometrias e Similaridades**. 2008. 142 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

VELOSO, Eduardo. **Geometria: temas atuais, materiais para professores**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2004.